Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
03.05.2021
Blatt 03

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

9. (1 + 1 + 2 + 1 + 3 Punkte) Es bezeichne $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$, $n \in \mathbb{N}_0$, die Tschebyscheff-Polynome. Zeigen Sie:

(a) Die T_n sind orthogonal in $C([-1,1])$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x.$$

(b) Es gilt die Drei-Term-Rekursion $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ für $n \geq 1$.

(c) Die Extremstellen der T_n auf $[-1,1]$ sind genau $\cos(\frac{j\pi}{n})$ für $j = 0, 1, \ldots, n$, und die Nullstellen sind genau $\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$ für $k = 1, 2, \ldots, n$.

(d) Für die Nullstellen x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ der T_n gilt $\max_{x\in[-1,1]} |\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)| = 2^{1-n}$.

(e) Das Knotenpolynom zu den Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome hat unter allen normierten Polynomen vom selben Grad das kleinste Maximum auf $[-1,1]$ (Satz 2.14), d.h. man beweise die Formel

$$\min_{x_1,x_2,\ldots,x_n\in[-1,1]} \max_{x\in[-1,1]} |\prod_{j=1}^{n}(x - x_j)| = 2^{1-n}.$$

10. (3 Punkte) Bestimmen Sie das Polynom p, das den Interpolationsbedingungen $p(1) = 4$, $p'(1) = 2$, $p''(1) = 2$, $p(2) = 1$, $p'(2) = 3$ genügt. Werten Sie das Polynom mit Hilfe es Horner-Schemas bei $x = 0$ aus.

11. (6 Punkte) Leiten Sie die Gewichte für die baryzentrische Interpolation in Tschebyscheff-Knoten 1. Art (den Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome T_{n+1}) her: $\lambda_j = (-1)^j \sin(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)})$, für $j = 0, 1, \ldots, n$.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 3 (6 + 2 Punkte)

(a) Schreiben Sie Funktionen `baryIntEqui(a, b, fs)`, `baryIntTschFst(a, b, fs)` und `baryIntTschSnd(a, b, fs)`, die jeweils Funktionen zurück geben mit denen man die baryzentrische Form des Interpolationspolynoms zu den Auswertungen `fs` an
   (i) äquidistanten Stützstellen auf dem Intervall $[a, b]$
   (ii) Tschebyscheff-Knoten erster Art, angepasst an das Intervall $[a, b]$
   (iii) und Tschebyscheff-Knoten zweiter Art, angepasst an das Intevall $[a, b]$

   auswerten kann. Die Funktionen, die Sie zurück geben sollten in der Lage sein mit `numpy.array`s umgehen zu können.

(b) Für unsere Zwecke sei die Heaviside-Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

   Plotten Sie das Interpolationspolynom zu $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b] = [-2, 2]$ mit 60 Stützstellen, berechnet über
   (i) Newton dividierte Differenzen,
   (ii) die baryzentrische Darstellung mit äquidistanten Knoten,
   (iii) und die baryzentrische Darstellung mit Tschebyscheff-Knoten erster und zweiter Art.

   Für die Auswertung des Interpolationspolynoms über dividierte Differenzen können Sie die auf der Homepage zur Verfügung gestellte Lösung der zweiten Programmieraufgabe verwenden.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 10.05., 12.00 Uhr
Besprechung: 10.05. - 13.05., in den Übungen