Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
10.05.2021
Blatt 04

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

12. (1 + 2 Punkte) Entscheiden und begründen Sie, ob für die folgenden Funktionen Wahlen von Parametern $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_5 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass sie auf $[-2, 2]$ bzw. $[0, 2]$ natürliche kubische Spline-Funktionen bilden.

$$s(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < -1 \\ a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4, & -1 \le x \le 1 \\ x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} b_1 + b_2(x-1) + b_3(x-1)^2 + b_4(x-1)^3, & 0 \le x \le 1 \\ (x-1)^3 + b_5x^2 - 1, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

13. (5 Punkte) Wir möchten uns überlegen, dass die in der Vorlesung vorgestellte einfache Variante kubische Spline-Funktionen zu berechnen instabil ist. Dafür bezeichne $s_1 \colon [x_0, x_n] \to \mathbb{R}$ die für die Korrektur der ersten Ableitung verwendete Spline-Funktion, die die Null-Funktion interpoliert (d.h. $s_1(x_j) = 0$ für $0 \le j \le n$), mit den zusätzlichen Randbedingungen $s_1'(x_0) = 1$ und $s_1''(x_0) = 0$.

Berechnen Sie die Koeffizienten von s_1 unter der Voraussetzung eines äquidistanten Gitters mit $x_{j+1} - x_j = 1$ für $0 \le j < n$ und zeigen Sie, dass diese mit wachsender Anzahl an Stützstellen unbeschränkt sind.

Hinweis: Wie in der Vorlesung vorgestellt hängen die Koeffizienten des kubischen Polynoms $s_1|_{[x_{j+1}, x_{j+2}]}$ linear von $s_1|_{[x_j, x_{j+1}]}$ ab. Untersuchen Sie diesen Zusammenhang und diagonalisieren Sie um die Unbeschränktheit einsehen zu können.

14. (5 Punkte) Berechnen Sie die natürliche kubische Spline-Funktion zu den Daten

x_j	2	3	4	5	6
$f(x_j)$	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

.

Bitte wenden!

15. (5 Punkte) Berechnen Sie $\int_a^b p(f|a, \frac{a+b}{2}, b)(x)\mathrm{d}x$ für eine allgemeine Funktion $f \in C([a,b])$. Zeigen Sie, dass falls f ein Polynom dritten Grades ist Ihr Ergebnisx auch mit dem tatsächlichen Integral von f übereinstimmt (für Polynome zweiten Grades ist das klar, warum?). Folgern Sie hieraus für $f \in C^4([a,b])$ die Abschätzung

$$\left| \int_a^b p(f|a, \frac{a+b}{2}, b)(x) - f(x)\mathrm{d}x \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} \left\| f^{(4)} \right\|_{\infty,[a,b]}$$

Programmieraufgabe 4 (6 + 1 Punkte)

(a) Schreiben Sie eine Funktion `splineNotAKnot(xs, fs)`, welche eine Funktion zurück gibt, die für gegebenes `np.array` (oder auch einfache Zahl) die Auswertungen der not-a-knot Spline-Funktion zu den Knotenpunkten `xs` und Auswertungen `fs` einer ansonsten unbekannten Funktion zurück gibt. Die Koeffizienten/Momente der Spline-Funktion sollen nicht bei jedem Aufruf der zurückgegebenen Funktion neu berechnet werden.

(b) Plotten Sie die not-a-knot Spline-Funktion zu $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x)$ interpoliert durch 8 äquidistante Knoten. Fügen Sie Ihrem Plot ebenfalls die Punkte durch die interpoliert wird bei.

Hinweis: Für das Berechnen der nötigen dividierten Differenzen dürfen Sie auf die Ergebnisse von Blatt 02 zurückgreifen (sowohl Ihre als auch die Lösung von der Homepage dürfen verwendet werden).

Abgabe: elektronisch bis Mo., 17.05., 12.00 Uhr
Besprechung: 17.05. - 19.05., in den Übungen