Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
17.05.2021
Blatt 05

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

16. (4 Punkte) Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\ldots,n}$ für $a_{ij} \in \mathbb{C}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A in mindestens einem Kreis $\overline{B_{r_i}(a_{ii})}$ mit $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ enthalten ist.

17. (1 + 1 + 4 Punkte) Für unsere Zwecke definieren wir die Hermite-Polynome $H_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ durch $H_n(x) = (-2)^{-n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$. Ihre Nullstellen kommen bei Quadraturformeln auf dem unbeschränkten Intervall $\mathbb{R}$ zum Einsatz. Zeigen Sie:

(a) Die Hermite-Polynome sind orthogonal in $C(\mathbb{R})$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) g(x) \mathrm{d}x.$$

(b) Es gilt die Drei-Term-Relation $H_{n+1}(x) + \frac{n}{2} H_{n-1}(x) = x H_n(x)$ für $n \geq 1$.

(c) Die Nullstellen ξ_k, $1 \leq k \leq n$, des Hermite-Polynoms H_n sind reell und wir haben die obere Schranke $\max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \leq \sqrt{2n-2}$.

Hinweis zu (c): Interpretieren Sie H_n als charakteristisches Polynom einer Matrix und nutzen Sie Aufgabe 16. Tatsächlich kann man mehr sagen: die Nullstellen der H_n sind Wigner-Halbkreis verteilt.

18. (3 Punkte) Es seien $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$ für $0 \leq i \leq n$ und

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

eine Interpolationsquadraturformel deren Stützstellen symmetrisch sind, d.h. es gelte $x_i = 1 - x_{n-i}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Gewichte symmetrisch sind, d.h. es gilt $a_i = a_{n-i}$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.

Bitte wenden!

19. (1 + 2 + 1 Punkte) Gibt es eine Wahl von Gewichten $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 2$, so dass

$$Q(f) = a_0 f(-\frac{3}{2}) + a_1 f(-\frac{1}{2}) + a_2 f(1)$$

eine Interpolationsquadraturformel auf $[-2, 2]$ bzw. auf $[-\frac{3}{2}, 1]$ ist? Geben sie diese Wahlen ggf. an. Was ist jeweils der maximal mögliche Grad an Polynom das Q exakt auf dem Interval integriert?

Hinweis: Sie dürfen ein Computer-Algebra-System für die komplizierteren Rechnungen verwenden.

Programmieraufgabe 5 (3 + 2 + 1 Punkte) In dieser Aufgabe wollen wir allgemeine iterierte/zusammengesetzte Quadraturformeln implementieren, von denen die iterierte Trapezregel in der Vorlesung genauer untersucht worden ist.

(a) Implementieren Sie eine Funktion `chainedQuad(quad, a, b, n, f)`, die die gegebene Funktion `f` auf dem Intervall $[a, b]$ integriert und dabei `n`-fach die Quadraturformel `quad` verwendet. `quad` ist dabei Quadraturformel auf $[0, 1]$ gegeben als Tupel `quad = (xs, coeff)`, wobei `xs` die Stützstellen und `as` die Koeffizienten sind.

(b) Nutzen Sie die Funktion `chainedQuad` um die zusammengesetzte Trapezregel als `chainedTrapezoid(a, b, n, f)` und Simpson-Regel als `chainedSimspon(a, b, n, f)` zu implementieren.

(c) Verwenden Sie die Funktionen aus (b) und eine eigens gewähle zusammengesetzte Quadraturformel (die mindestens Polynome vom Grad 3 exakt integriert) und plotten Sie die Fehler bei Integration der Funktion $f(x) = \cos(x-1)^2 + \sin(\frac{7x}{10}) + x$ auf dem Interval $[-1, 2\pi]$ bei steigender Anzahl `n` an Anwendungen der Quadraturformeln.

Abgabe: elektronisch bis Di., 25.05., 12.00 Uhr
Besprechung: 25.05. - 26.05., in den Übungen