Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
14.06.2021
Blatt 08

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

26. (3 + 1 Punkte) In der Analysis II lernt man, dass auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum je zwei Normen äquivalent sind. Zeigen Sie, dass $C([0,1])$ unendlich-dimensional ist indem Sie

(a) zwei nicht äquivalente Normen finden bzw.
(b) eine unendliche Folge linear unabhängiger Elemente angeben.

27. (2 + 2 Punkte) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix}$$

und nutzen Sie diese zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}^T$.

28. (3 + 1 + 1 Punkte) Berechnen Sie die LR-Zerlegung (mit Pivotisierung) der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 6 & 14 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix}.$$

und nutzen Sie diese zur Berechnung der Determinante von A. Ist bei dieser Matrix die Pivotisierung bei Berechnung der LR-Zerlegung nötig?

29. (2 Punkte) Beweisen Sie Lemma 4.6 in Abschnitt 4.1.1: Die Inverse einer Frobenius-Matrix ergibt sich durch Umkehr der Vorzeichen der nicht-diagonal Elemente.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 8 (5 + 3 + 3 Punkte) Aus der Vorlesung ist Ihnen bereits ein Algorithmus bekannt um die LR-Zerlegung einer invertierbaren Matrix zu berechnen mit Hilfe von (partieller) Pivotisierung. Um die Idee kurz zu wiederholen: bei der (partiellen) Pivotisierung tauscht man die Zeilen der Matrix deren LR-Zerlegung man berechnen möchte, so dass das betragsmäßig größte Element der linkesten Spalte (mit der noch gerechnet wird) in der obersten Zeile steht (mit der noch gerechnet wird). Dieses Element nennt man dann Pivotelement. Das Resultat ist eine LR-Zerlegung $PA = LR$ bei der L und R Dreiecksmatrizen sind und P eine Permutationsmatrix, die die Zeilenvertauschungen von A beschreibt.

In dieser Aufgabe möchten wir die Pivotisierungsstrategie noch etwas ausbauen und zur sog. vollständigen Pivotisierung übergehen. Bei der vollständigen Pivotisierung werden nicht bloß die Zeilen der Matrix, von denen man die LR-Zerlegung sucht, vertauscht, sondern auch die Spalten, so dass dann das Pivotelement das betragsmäßig größte Element der Teilmatrix ist auf der noch gerechnet wird. Hierbei erhält man am Ende also eine LR-Zerlegung der Form $PAQ = LR$, wobei L, R und P die selben Rollen übernehmen wie bei (partieller) Pivotisierung und Q auch eine Permutationsmatrix ist, die die Spaltenvertauschungen von A beschreibt.

Außerdem sollen Sie in dieser Aufgabe darauf achten möglichst wenig Speicherplatz für die Berechnung der LR-Zerlegung aufzuwenden.

(a) Implementieren Sie eine Funktion `partialPivotLU(A)`, die die LR-Zerlegung $PA = LR$ mit (partieller) Pivotisierung der gegegeben Matrix berechnet. Die Dreiecksmatrizen L und R sollen dabei die übergebene Matrix überschreiben. Zurückgegeben werden soll ein Vektor, der die Permutationsindizes der Zeilen für die Pivotisierung enthält.

(b) Implementieren Sie eine Funktion `fullPivotLU(A)`, die die LR-Zerlegung $PAQ = LR$ mit vollständiger Pivotisierung der gegebenen Matrix berechnet. Auch hier sollen die Faktoren L und R die übergebene Matrix überschreiben. Die Rückgabe der Funktion ist ein Tupel aus Vektoren, die die Permutationsindizes der Zeilen und der Spalten für die Pivotisierung enthalten.

Eine genauere Beschreibung der Verwendung/Rückgaben der Funktionen können Sie der *stub*-Implementierung entnehmen.

(c) Testen und vergleichen Sie Ihre Implementierungen an den sog. Pascal-Matrizen S_n, L_n und U_n, die $n \times n$-Matrizen sind, für die gilt

$$(S_n)_{i,j} = \binom{i+j}{i}, \qquad (L_n)_{i,j} = \begin{cases} \binom{i-1}{i-j} & i \geq j \\ 0 & i < j \end{cases}, \qquad U_n = L_n^T.$$

sowie die überraschende Identität $S_n = L_n U_n$ (indem Sie bspw. die Determinanten vergleichen).

Abgabe: elektronisch bis Mo., 21.06., 12.00 Uhr
Besprechung: 21.06. - 23.06., in den Übungen