Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
21.06.2021
Blatt 09

## ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

**30. (2 Punkte)** Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass die von der 2-Norm induzierte Matrixnorm $\|A\|_2$ gegeben ist durch den größten Singulärwert von $A$, d.h.

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \max\left\{\sqrt{|\lambda|} \mid \lambda \text{ ein Eigenwert von } A^TA\right\}$$

**31. (1 + 2 + 2 Punkte)** Es sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to [0,\infty)$ eine beliebige Matrix-Norm.

(a) Die Norm $\|\cdot\|$ heißt submultiplikativ, falls für zwei quadratische Matrizen $A$ und $B$ gilt, dass $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$. Zeigen Sie: Jede von einer Vektor-Norm induzierte Matrix-Norm ist submultiplikativ.

(b) Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $A$ gilt $\|A\|_2 \le \|A\|$, wenn $\|\cdot\|$ von einer Vektor-Norm induziert wird.

(c) Finden Sie ein Beispiel einer Matrix-Norm, die nicht von einer Vektor-Norm induziert wird, für die aber trotzdem die Ungleichung in (b) auch für nicht-symmetrische Matrizen gilt.

**32. (1 + 2 + 2 Punkte)** Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$

und (d) nutzen Sie diese zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Bx = \begin{pmatrix} 6 & 19 & 9 \end{pmatrix}^T$.

**33. (3 Punkte)** Bestimmen Sie die reduzierte QR Zerlegung der folgenden Matrix mit Hilfe von Gram-Schmidt Orthogonalisierung:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

**Programmieraufgabe 9 (2 + 2 + 2 Punkte)** Wie Ihnen bekannt ist kommt es bei numerischen Berechnungen mit einem Computer häufig zu Rundungsfehlern was zur Folge hat, dass man für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ lediglich eine approximative LR-Zerlegung $A \approx \tilde{L}\tilde{R}$ berechnen kann. Ist nun $\tilde{x}$ eine Lösung es Gleichungssystems $\tilde{L}\tilde{R}\tilde{x} = b$ für ein $b \in \mathbb{R}^n$, so gilt im Allgemeinen, dass das Residuum $r = b - A\tilde{x}$ nicht verschwindet. Um das Resultat zu verbessern (also das Residuum zu verkleinern) verwende man folgende Nachiteration:

- Setze $x_0 = \tilde{x}$.
- Für $i = 0, 1, 2, \ldots$ führe aus:
  - Setze $r_i = b - Ax_i$.
  - Löse das lineare Gleichungssystem $\tilde{L}\tilde{R}d_i = r_i$.
  - Setze $x_{i+1} = x_i + d_i$.

Man kann von diesem Algorithmus zeigen, dass die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unter geeigneten Voraussetzungen (nämlich $\|\mathrm{id} - \tilde{R}^{-1}\tilde{L}^{-1}A\| < 1$) gegen die wahre Lösung $x$ konvergiert.

(a) Implementieren Sie geeignete Funktionen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems von dem bereits eine LR-Zerlegung berechnet worden ist.

(b) Passen Sie die oben stehende Nachiteration so an, dass eine gestörte LR-Zerlegung mit (partieller) Pivotisierung $\tilde{P}A = \tilde{L}\tilde{R}$ übergeben werden kann. Der Algorithmus soll so lange laufen bis der verbleibende Fehler "hinreichend klein" ist (bauen Sie aber auch eine Begrenzung der maximalen Anzahl an Iterationen ein, die variabel ist) und die Pivotisierung soll in der Form wie in Programmieraufgabe 8 akzeptiert werden.

(c) Nutzen Sie Ihre Implementierung der LR-Zerlegung mit (partieller) Pivotisierung von Blatt 08 (oder die Musterlösung) und testen Sie die Nachiteration an der (absichtlich) gestörten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

von denen sie jeweils die LR-Zerlegung berechnen und zur Lösung der linearen Gleichungssysteme $Ax = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 24 \end{pmatrix}^T \approx \tilde{A}x$ nutzen.

**Abgabe:** elektronisch bis Mo., 28.06., 12.00 Uhr
**Besprechung:** 28.06. - 30.06., in den Übungen