Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
28.06.2021
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

34. (1 + 1 + 2 + 2 + 3 Punkte) Wir definieren den Spektral-Radius einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es die sog. Gelfandsche Formel $\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ zu zeigen, ohne auf die Jordansche Normalform zurück greifen zu müssen. Man bemerke, dass hier $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrix-Norm sein kann, da alle Matrix-Normen die selben konvergenten Folgen produzieren aufgrund ihrer Äquivalenz. Zeigen Sie dazu:

(a) Der Spektral-Radius selbst ist keine Matrix-Norm.
(b) Die Matrizen A^TA und AA^T haben die selben Eigenwerte.
(c) Die Spektral-Norm $\|\cdot\|_2$ und die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ (definiert durch $\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2$) sind orthogonal invariant, d.h. für eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt $\|QA\| = \|AQ\| = \|A\|$.
(d) Die Gelfandsche Formel für diagonalisierbare Matrizen.
(e) Auch für allgemeine (nicht-diagonalisierbare) Matrizen gilt die Gelfandsche Formel.

Hinweis: Nutzen Sie für Teil (e) die QR-Zerlegung und führen Sie das Ergebnis zurück auf Teil (d). Die Aussage gilt im übrigen auch für unendlich-dimensionale Operatoren.

35. (2 Punkte) Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $Q = \mathrm{id} - 2\frac{ww^T}{w^Tw}$ eine Householder-Reflexion. Zeigen Sie: Falls $w = x \pm \|x\|_2 e_1$ so gilt $Qx = \mp \|x\|_2 e_1$.

36. (2 + 1 Punkte) Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definieren wir die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|_2^2}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die kritischen Stellen $x \in \mathbb{R}^n$ von f entsprechen genau den Eigenvektoren der Matrix $\frac{1}{2}(A^T + A)$. Die korrespondierenden Eigenwerte sind $f(x)$.
(b) Ist A symmetrisch, so ist der maximale Wert von f der maximale Eigenwert von A und der minimale Wert von f ist der minimale Eigenwert von A.

Bitte wenden!

37. (2 + 1 Punkte) Eine verschärfte Version des Banachschen Fixpunktsatzes ist: Es sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f\colon X \to X$ sei eine Abbildung, so dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert womit f^n eine Kontraktion ist. Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.

Zeigen Sie diese Variante des Banachschen Fixpunktsatzes und geben Sie einen Raum (X, d) sowie eine Abbildung $f\colon X \to X$, die keine Kontraktion ist, aber die Voraussetzungen der obigen Variante erfüllt sind.

Hinweis: Mit f^n ist die n-te Iterierte der Abbildung f bezeichnet, also $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ usw.

38. (2 Punkte) Der Brouwersche Fixpunktsatz lautet: Sei $f\colon \mathbb{R}^n \supset B_1(0) \to B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ stetig. Dann besitzt f einen Fixpunkt. Zeigen Sie diesen Satz in einer Dimension.

Programmieraufgabe 10 (4 + 2 Punkte)

(a) Implementieren Sie die Berechnung der QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (mit $m \geq n$) mittels Givens-Rotationen in einer Funktion `QRGivens(A)`.

(b) Testen Sie Ihre Implementierung an einer Reihe zufällig generierter Matrizen und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: elektronisch bis Mo., 05.07., 12.00 Uhr
Besprechung: 05.07. - 07.07., in den Übungen