Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. Florian Jarre
Joseph Adams M.Sc.

SoSe 2021
12.07.2021
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR NUMERIK I

43. (4 Punkte) Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssytem

$$x^3 + y^3 = 4 \quad \text{und} \quad x^3 - y^3 = 0.$$

(a) Finden Sie eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deren Nullstellen genau die Lösungen des Gleichungssystems sind. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle von F für jeden Startwert $x_0 \in [1,2]^2$ konvergiert.

(b) Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ aus und bestimmen Sie die (Maximums-)Norm des Fehlers.

44. (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob das das nichtlineare Gleichungssystem

$$x = \exp\left(\frac{1}{2}(\sin(y) - 1)\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$$

eine eindeutige Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

45. (4 Punkte) Verwenden Sie das in der Vorlesung besprochene Fixpunktverfahren dritter Ordnung um das Minimum der Funktion $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x$ ausgehend von dem Startpunkt $x_0 = 3$ zu approximieren. Berechnen Sie die ersten beiden Iterationen.

46. (4 Punkte) Es seien $C = (c_{ik})_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben mit $\|C\|_F < 1$. Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \sin(c_{ik}x_k) + b_i, \qquad 1 \le i \le n$$

genau eine Lösung besitzt.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe 12 (4 Punkte)

(a) Implementieren Sie in einer Funktion `bisectionMethod(f, a, b)` die Bisektionsverfahren zum finden einer Nullstelle von f in dem Interval $[a, b]$. Hierbei dürfen Sie davon ausgehen, dass die Voraussetzungen an f auf dem Interval erfüllt sind.

(b) Implementieren Sie in einer Funktion `secantMethod(f, x0)` die Sekantenmethode zur Auffindung von Nullstellen.

(c) Implementieren Sie in einer Funktion `newton(f, Df, x0)` das Newton-Verfahren für nichtlineare Gleichungssysteme.

(d) Probieren Sie Ihre Funktionen an eigens gewählten Beispielen aus.

Abgabe: elektronisch bis Mo., 19.07., 12.00 Uhr
Besprechung: 19.07. - 21.07., in den Übungen