Tutorium zur Numerik I

20.09.21

Fragen an: melinda.hagedorn@hhu.de

Grober Aufbau: $10^{00} - 11^{00}$ Theorie
$11^{00} - 13^{00}$ Aufg. bearbeiten, Mittagessen
$13^{00} - 14^{30}$ Aufg. besprechen, Theorie
$14^{30} - 15^{30}$ Aufg. bearbeiten
$15^{30} - 16^{00}$ Aufg. besprechen

1 Grundlegende Konzepte der Numerik

1.2 Gleitkommadarstellung

Computer können Zahlen nur mit <u>endlich vielen</u> Ziffern darstellen => Fehlern in numerischen Algorithmen

Zahl $x \in \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als $x = \pm \underset{\text{Mantisse}}{m} \cdot \underset{\text{Basis}}{b}^{\overset{\text{Exponent}}{\pm e}}$

im Computer: $x = \pm (1+f) \cdot 2^{c-1023}$

z.B. $f = \sum_{j=1}^{52} f_j \cdot 2^{-j} \rightsquigarrow 52$ Bits

$c = \sum_{j=0}^{10} c_j \cdot 2^j \rightsquigarrow 11$ Bits

Vorzeichen $\pm \rightsquigarrow 1$ Bit

$\left.\right\}$ 64 Bits

Arten von Fehlern. Sei $\tilde{x}$ ein (fehlerbehaftete) Approximation an x, dann:

absoluter Fehler $|x - \tilde{x}|$ und

relativer Fehler $\left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right|$

Maschinengenauigkeit: $10^{-16} \approx 2^{-52}$

1.3 Kondition und Stabilität

Kondition: Maß für Einfluss von Störungen auf die Lösung

<u>Def</u>: Aufgabe heißt <u>schlecht konditioniert</u>, falls kleine Störungen in den Daten große relative Fehler in den Lösungen verursachen, d.h. falls $\frac{|\phi(\tilde{x}) - \phi(x)|}{|\phi(x)|} \gg \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$

Def: Für kleine Δx gilt $\left|\frac{\phi(\tilde{x})-\phi(x)}{\phi(x)}\right| \approx \Big|\underbrace{\phi'(x)\frac{x}{\phi(x)}}_{=:\kappa \text{ Konditionszahl}}\Big| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$

d.h. Aufgabe schlecht konditioniert, falls $|\kappa| \gg 1$

Bsp Bestimme die Kondition von $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ für $x_2 \neq 0$

Lsg: $|\kappa_1| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{x_1}{f(x_1,x_2)}\right| = \left|\frac{1}{x_2} \cdot \frac{\cancel{x_1}}{\cancel{x_1}/x_2}\right| = \left|\frac{1}{\cancel{x_2}} \cancel{x_2}\right| = 1$

$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2}$ $\quad |\kappa_2| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{x_2}{f(x_1,x_2)}\right| = \left|\frac{-\cancel{x_1}}{x_2^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{x_2}}{\cancel{x_1}/x_2}\right| = \left|\frac{-1}{\cancel{x_2}} \cdot \cancel{x_2}\right| = |-1| = 1$ $\Big\}$ gut konditioniert

Def Algorithmus $\hat{\phi}$ heißt instabil, falls $\left|\frac{\hat{\phi}(\tilde{x})-\phi(x)}{\phi(x)}\right| \gg \left|\frac{\phi(\tilde{x})-\phi(x)}{\phi(x)}\right|$

1.4/1.5 Komplexität und Landausymbole

Def Der Rechenaufwand (Komplexität) ist die Anzahl an benötigten Rechenoperationen.

Bsp: Skalarprodukt $x^T y = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$

$\rightsquigarrow$ n Multiplikationen, n-1 Additionen $\Rightarrow \mathcal{O}(n)$

Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathcal{O}(n^2)$

Def $f = o(g),\ x \to x_0 \ :\Longleftrightarrow\ \lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$

$f = \mathcal{O}(g),\ x \to x_0 \ :\Longleftrightarrow\ \exists c, \varepsilon > 0 : |f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \ \forall x \text{ mit } |x-x_0| < \varepsilon$

Wdh Reihenentwicklungen für kleine x

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $\quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, $\quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Bsp (1) Zeige $\log(1+h) = h + o(h),\ h \to 0$, d.h. $\log(1+h) - h = o(h),\ h\to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\log(1+h)-h|}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{h^n}{n} - h\right|}{|h|} = \lim_{h\to 0}\frac{\left|\cancel{h} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots - \cancel{h}\right|}{|h|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left|\frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \dots\right| = 0$$

(2) Zeige $\frac{1-\cos(h)}{h} = \mathcal{O}(h),\ h\to 0$

$0! = 1$ $\quad \left|\frac{1-\cos(h)}{h}\right| = \left|\frac{1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!}}{h}\right| = \left|\frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{4!} + \dots}{h}\right|$

$$= \left|\frac{h}{2} - \frac{h^3}{4!} + \dots\right| \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{=: c > 0} |h| \quad \text{für } h \to 0$$

Regeln: $f_1 = \mathcal{O}(g),\ f_2 = \mathcal{O}(g),\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g)$ und $cf_1 = \mathcal{O}(g)$

$f_1 = \mathcal{O}(g_1),\ f_2 = \mathcal{O}(g_2) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 = \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$ } gelten auch für klein-o

$f = o(g) \Rightarrow f = \mathcal{O}(g)$

1.6 Differentielle Fehleranalyse

Def: relative Konditionszahlen $K_{ij}(x) := \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{\phi_i(x)}$

Aufgabe schlecht konditioniert, wenn i,j ex. mit $|K_{ij}| \gg 1$

Bsp: $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$. Dann $K_1 = \frac{x_1}{x_1+x_2} \overset{x_1 \neq 0}{=} \frac{1}{1 + x_2/x_1}$, $K_2 \overset{x_2 \neq 0}{=} \frac{1}{1 + x_1/x_2}$

Also für $\frac{x_1}{x_2} \approx -1$ ist die Addition schlecht konditioniert

Auslöschung: Verlust wesentlicher Dezimalstellen bei der Subtraktion

Die Multiplikation ist gut konditioniert.

1. Übungseinheit

1) Zeige für $h \to 0$: a) $3h^2 \neq o(h^2)$, b) $3h^2 = \mathcal{O}(h^2)$

c) $e^{-1/h} \neq o(h)$

2) Bestimme jeweils alle $p \in \mathbb{N}_0$, sodass $f = \mathcal{O}(x^p)$ für $x \to 0$

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \cos(x) - 1$ c) $f(x) = \sin^2(x)$

3) Für welche x sind folgende Rechenoperationen schlecht konditioniert?

a) $f(x_1,x_2) = x_1^{x_2}$ mit $x_1 > 0$ b) $f(x) = x^2 \ln(x)$ mit $x > 0$

c) $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ mit $x \neq 0$ d) $f(x) = e^x$

---

1) a) Beh: $3h^2 \neq o(h^2)$ für $h \to 0$

$\lim_{h\to 0} \left|\frac{3h^2}{h^2}\right| = \lim_{h \to 0} 3 = 3 \neq 0$

b) Beh: $3h^2 = \mathcal{O}(h^2)$ für $h \to 0$

$|3h^2| = 3h^2 \leq 3h^2 = 3|h^2|$, $c := 3 > 0$

c) Beh: $e^{-1/h} \neq o(h)$ für $h \to 0$

$\lim_{h \searrow 0} e^{-1/h} = 0$, $\lim_{h \nearrow 0} e^{-1/h} = \infty$

$\Rightarrow \lim_{h \searrow 0} \frac{|e^{-1/h}|}{|h|} = 0$, aber $\lim_{h \nearrow 0} \frac{|e^{-1/h}|}{|h|} = \infty$

2) Best. jeweils alle $p \in \mathbb{N}_0$, sodass $f = \mathcal{O}(x^p)$ für $x \to 0$

a) $f(x) = x^2, \quad |x^2| = x^2 \leq x^2 \quad \Rightarrow p \in \{0, 1, 2\}$

b) $\cos(x) - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) - \cancel{1} = -\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \quad \Rightarrow p \in \{0, 1, 2\}$

c) $\sin^2(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{6} + \mathcal{O}(x^6) \quad \Rightarrow p \in \{0, 1, 2\}$

3) Für welche x sind folgende Rechenop. schlecht konditioniert?

$e^{\ln(x)} = x$

$\ln(x^c) = c\ln(x)$

a) $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} = e^{\ln(x_1^{x_2})} = e^{x_2 \ln(x_1)}$ mit $x_1 > 0$

$|\kappa_1| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{x_1}{f}\right| = \left|x_2 \cdot x_1^{x_2 - 1} \cdot \frac{x_1}{x_1^{x_2}}\right| = \left|x_2 \cdot \frac{\cancel{x_1^{x_2}}}{\cancel{x_1^{x_2}}}\right| = |x_2|$

$|\kappa_2| = \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{x_2}{f}\right| = \left|\ln(x_1) \cancel{e^{x_2 \ln(x_1)}} \cdot \frac{x_2}{\cancel{x_1^{x_2}}}\right| = |x_2 \ln(x_1)|$

schlecht konditioniert, falls $\begin{cases} |x_2| \gg 1 \\ x_1 \gg 1 \text{ und } x_2 \neq 0 \\ x_1 \ll 1 \text{ und } x_2 \neq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = x^2 \ln(x)$ mit $x > 0$

$|\kappa| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} \frac{x}{f}\right| = \left|\left(2x\ln(x) + \frac{x^2}{x}\right) \cdot \frac{x}{x^2 \ln(x)}\right| = \left|2 + \frac{1}{\ln(x)}\right|$

schlecht konditioniert, falls $x \approx 1$, denn $\ln(1) = 0$

c) $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$ mit $x \neq 0$

$|\kappa| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{x}{f}\right| = \left|\frac{\sin(x)x - (1 - \cos(x))}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x} \frac{\cancel{x}}{1 - \cos(x)}\right|$

$= \left|\frac{\sin(x)x - (1 - \cos(x))}{1 - \cos(x)}\right| = \left|x \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} - 1\right|$

schlecht konditioniert, falls $|x| \gg 1$ oder $x \approx 2\pi m$ für $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

also $\cos(x) = 1$, aber $x \neq 0$, denn

$\lim_{x \to 0} \frac{x\sin(x)}{1 - \cos(x)} - 1 \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) + x\cos(x)}{\sin(x)} - 1 \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)}{\cos(x)} - 1$

$= \frac{2}{1} - 1 = 1$

d) $f(x) = e^x$

$|\kappa| = \left|\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{x}{f}\right| = \left|\cancel{e^x} \cdot \frac{x}{\cancel{e^x}}\right| = |x|$ schlecht konditioniert, falls $|x| \gg 1$

2 Interpolation

Def Interpolationsaufgabe. Geg: (x_j, y_j) und Ansatzfkt $g_j(x)$

Ziel: Finde Koeff. c_j, sodass $\varphi(x_j) = \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x_j) = y_j$

ges. Fkt: $\varphi(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x)$

Interpol. bed.

2.1 Polynominterpolation

Def Menge der Polynome vom Grad $\leq n$: $\mathbb{P}_n = \{ p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \mid a_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,..,n\}\}$

$\mathbb{P}_n$ ist ein Vektorraum mit Basis $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ (Monome)

Def Polynom-Interpol.aufgabe: Zu $n+1$ paarw. versch. Knoten $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit Knotenwerten $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ ein $p \in \mathbb{P}_n$ finden mit $p(x_i) = y_i\ \forall i$

Die Polynom-Interpol.aufg. ist eindeutig lösbar

Lagrange-Darstellung $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$ mit $l_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$

Es gilt $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \delta_n \omega_n(x)$ mit $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$

und $\delta_n = \frac{f(x_n) - p_{n-1}(x_n)}{\omega_n(x_n)}$, wobei $\{\omega_0, \ldots, \omega_n\}$ die Newton-Basis von $\mathbb{P}_n$ und $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ die divierten Differenzen.

Newton-Darstellung $p(f \mid x_0, .., x_n) = \sum_{i=0}^{n} ([x_0, .., x_i]f)\, \omega_i(x)$

$$= [x_0]f + [x_0, x_1]f\, \omega_1(x) + \ldots + [x_0, .., x_n]f\, \omega_n(x)$$

Lemma von Aitken: Die Interpolierende an $x_0, .., x_n$ ist eine lineare Interpolation zwischen zwei Interpol.polynomen auf $x_1, .., x_n$ und $x_0, .., x_{n-1}$, d.h. $[x_j, \ldots, x_k]f = \frac{[x_{j+1}, \ldots, x_k]f - [x_j, \ldots, x_{k-1}]f}{x_k - x_j}$ für $x_k \neq x_j$

Schema:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_0 & [x_0]f & & & & & \\
 & & [x_0, x_1]f & & & & \\
x_1 & [x_1]f & & [x_0, x_1, x_2]f & & & \\
 & & [x_1, x_2]f & & [x_0, x_1, x_2, x_3]f & & \\
x_2 & [x_2]f & & [x_1, x_2, x_3]f & & & \\
 & & [x_2, x_3]f & & & & \\
x_3 & [x_3]f & & & & &
\end{array}$$

Bsp

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	1	3	2

i) $n = 2$, $l_{02} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} = \frac{(x-1)\cdot(x-3)}{3}$, $l_{12} = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}$,

$l_{22} = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}$ $\Rightarrow p_2(x) = 1 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{3} + 3 \cdot \frac{x(x-3)}{-2} + 2 \frac{x(x-1)}{6}$ nach Lagrange

ii)

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & & & \\
 & & \frac{3-1}{1-0} = 2 & & \\
1 & 3 & & \frac{-\frac{1}{2} - \frac{4}{2}}{3-0} = \frac{-5/2}{3} = -\frac{5}{6} & \\
 & & \frac{2-3}{3-1} = -\frac{1}{2} & & \\
3 & 2 & & &
\end{array}$$

$\omega_0(x) = 1$, $\omega_1(x) = x - x_0$, $\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

$\Rightarrow p_2(x) = 1 + 2x - \frac{5}{6} x(x-1)$ $\left(= -\frac{5}{6} x^2 + \frac{17}{6} x + 1\right)$ nach Newton

Bem Ist $f \in C^n(I, \mathbb{R})$, $I = [a, b]$, $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$, so ex. $\eta \in I$ mit $[x_0, .., x_n]f = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\eta)$

Satz 2.12 Ist $f \in C^{n+1}([x_0,x_n],\mathbb{R})$, dann ex. zu jedem $x \in [x_0,x_n]$ ein $\xi \in [x_0,x_n]$: $f(x) - P(f|x_0,..,x_n)(x) = \omega_{n+1}(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ und mit $\|f\|_\infty = \max_{x\in[x_0,x_n]} |f(x)|$ ist $\|f-P(f|x_0,..,x_n)\|_\infty \leq \|\omega_{n+1}\|_\infty \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}$

Korollar Ist $f \in C^\infty([a,b])$ und ex. ein $M>0$ mit $|f^{(n)}(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Folge der Interpol.polynome auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Funktion f.

Die Voraussetzung in obigem Korollar wird beispielsweise nicht von $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1,2]$ erfüllt. Daher:

Mehr Stützstellen $\overset{\text{i.A.}}{\not\Rightarrow}$ bel. genaue Approx. an f bzgl $\|\cdot\|_\infty$-Norm

Runge-Phänomen: Im divergenten Fall, dh. $\|f-P_n\|_\infty \to \infty$ für $n\to\infty$, treten insbes. an den Intervallrändern immer stärkere Oszillationen auf.

Weierstraß'scher Approx.satz: Jede Funktion $f \in C([a,b])$ kann beliebig gut gleichmäßig auf $[a,b]$ durch Polynome approximiert werden

Tschebyscheff-Polynome erfüllen $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m=n=0 \\ \pi/2, & m=n\neq 0 \end{cases}$

$T_k(x) = \cos(k \cdot \arccos(x))$ besitzt auf $[-1,1]$ die NST $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2k}\pi\right)$, $j=0,..,k-1$

Drei-Term-Rekursion $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_k(x) = 2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$ für $k \geq 2$

Wählt man als Knoten für die Interpol.aufg. auf $[-1,1]$ die NST der Tschebyscheff-Polynome, so wird $\|\omega_{n+1}\|_{\infty,[-1,1]}$ unter allen normierten Polynomen mit reellen NST minimal.

Für allgemeine Intervalle $[a,b]$ erhält man die optimalen Stützstellen durch affin-lineare Transformation $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ aus den Tschebyscheff-Knoten.

T-Knoten 1. Art (NST): $x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right)$

T-Knoten 2. Art (Extremalstellen): $x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$, $0 \leq j \leq n$

Modifizierte Lagrange-Darstellung:

$$p(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{x-x_j} f_j, \quad \text{denn} \quad l_{jn}(x) = \ell(x) \frac{\lambda_j}{x-x_j}$$

mit $\ell(x) := (x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$ und $\lambda_j := \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_j-x_k} = \frac{1}{\ell'(x_j)}$

Es gilt $1 = \sum_{j=0}^{n} l_{jn}(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{x-x_j}$, also $\ell(x) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{x-x_j}}$

Baryzentrische Interpol.formel: $p(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j f_j}{x-x_j} \Big/ \sum_{j=0}^{n} \frac{\lambda_j}{x-x_j}, & x \neq x_j \\ f_j, & x = x_j \end{cases}$

↳ Hinzufügen zusätzlicher Knoten mit geringem zusätzlichen Rechenaufwand

↳ sehr robust gegenüber Rundungsfehlern, auch für große n stabiler Algorithmus

Additionstheoreme: $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$

Pythagoras: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Wichtig: $\cos(-x) = \cos(x)$, $\sin(-x) = -\sin(x)$

2. Übungseinheit

1) Bestimme das Interpolationspolynom zu

x_i	-1	1	0	-2
$f(x_i)$	2	4	5	-5

a) in Lagrange-Darst. b) in Newton-Darst. c) bzgl der Monombasis

a) Lagrange-Darst. $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$ mit $l_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}$

$$l_{03}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-0)(x+2)}{(-1-1)(-1-0)(-1+2)} = \frac{x(x-1)(x+2)}{(-2)\cdot(-1)\cdot 1} = \frac{1}{2}x(x-1)(x+2)$$

$l_{13}(x) = \ldots = \frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$, $l_{23}(x) = \ldots = -\frac{1}{2}(x^2-1)(x+2)$, $l_{33}(x) = \ldots = -\frac{1}{6}x(x^2-1)$

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j)\, l_{j3}(x) = 2\cdot x(x-1)(x+2) + 4\,\frac{1}{6}x(x+1)(x+2) + 5\,\frac{-1}{2}(x^2-1)(x+2) + (-5)\,\frac{-1}{6}x(x^2-1)$$

$$= \ldots = -2x^2 + x + 5$$

b) Newton-Darst. $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, \omega_j(x)$ mit $a_j = [x_0,\ldots,x_j]f$ und $\omega_j(x) = \prod_{i=0}^{j-1}(x-x_i)$.

$[x_0]f = f(x_0) = 2$, $[x_1]f = f(x_1) = 4$, $[x_2]f = f(x_2) = 5$

$[x_3]f = f(x_3) = -5$

$$\begin{array}{llllll}
x_0 = -1 & 2 & & & & \\
 & & \frac{4-2}{1+1} = 1 & & & \\
x_1 = 1 & 4 & & \frac{-1-1}{0+1} = -2 & & \\
 & & \frac{5-4}{0-1} = -1 & & \frac{-2+2}{-2+1} = 0 & \\
x_2 = 0 & 5 & & \frac{5+1}{-2-1} = -2 & & \\
 & & \frac{-5-5}{-2-0} = 5 & & & \\
x_3 = -2 & -5 & & & &
\end{array}$$

$$\omega_0(x) = \prod_{i=0}^{-1}(x-x_i) = 1, \quad \omega_1(x) = \prod_{i=0}^{0}(x-x_i) = x - x_0 = x+1$$

$$\omega_2(x) = \ldots = (x+1)(x-1) = x^2-1, \quad \omega_3(x) = \ldots = x(x^2-1)$$

$$p_3(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j \omega_j(x) = [x_0]f\,\omega_0(x) + [x_0,x_1]f\,\omega_1(x) + [x_0,x_1,x_2]f\,\omega_2(x) + [x_0,x_1,x_2,x_3]f\,\omega_3(x)$$

$$= 2\cdot 1 + 1\cdot(x+1) - 2(x^2-1) + 0\cdot x(x^2-1)$$

$$= 2 + x + 1 - 2(x^2-1) = 2 + x + 1 - 2x^2 + 2 = -2x^2 + x + 5$$

c) Monombasis $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \overset{n=3}{=} b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$

$$p_3(0) = \boxed{b_0 \overset{!}{=} 5}$$

$$p_3(1) = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 \overset{!}{=} 4$$

$$p_3(-1) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \overset{!}{=} 2$$

$$p_3(-2) = b_0 - 2b_1 + 4b_2 - 8b_3 \overset{!}{=} -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & -8 & -10 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +I \\ +2I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & -12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :2 \\ :6 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)\begin{array}{l} -II \\ \\ -II \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} +III \\ \\ \cdot(-1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b_0 = 5, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = 0$$

$$p_3(x) = 5 + 1\cdot x - 2x^2 + 0x^3 = -2x^2 + x + 5$$