# Freiwillige Zusatzübungen zur Numerik I

**Aufgabe 1.1** Man zeige für $h \to 0$:

(a) $3h^2 \neq o(h^2)$

(b) $3h^2 = O(h^2)$

(c) $\exp(-1/h) \neq o(h)$

**Aufgabe 1.2** Man bestimme jeweils alle $p \in \mathbb{N}_0$, sodass $f = O(x^p)$ für $x \to 0$:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \cos(x) - 1$

(c) $f(x) = \sin^2(x)$

**Aufgabe 1.3** Für welche $x$ sind folgende Rechenoperationen schlecht konditioniert?

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ mit $x_1 > 0$

(b) $f(x) = x^2 \ln(x)$ mit $x > 0$

(c) $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$ mit $x \neq 0$

(d) $f(x) = \exp(x)$

**Aufgabe 2.1** Man bestimme das Interpolationspolynom zu

| $x_i$ | -1 | 1 | 0 | -2 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | 2 | 4 | 5 | -5 |

(a) in Lagrange-Darstellung

(b) in Newton-Darstellung

(c) bzgl der Monombasis

**Aufgabe 3.1** Man bestimme das Hermite-Interpolationspolynom zu den Daten

$$x_0 = -1,\ p(x_0) = 4,\ p'(x_0) = -4,\ x_1 = 0,\ p(x_1) = -2,\ x_2 = 2,\ p(x_2) = 1$$

**Aufgabe 3.2** Man bestimme das Hermite-Interpolationspolynom, sodass dessen Grad minimal wird und die Daten $x_0 = 1,\ q(x_0) = 2,\ q''(x_0) = -4,\ x_1 = 0,\ q(x_1) = 2$ interpoliert werden. Man berechne $q'(x_0)$.

**Aufgabe 3.3** Man bestimme den natürlichen kubischen Spline zu

| $x_k$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x_k)$ | 5/2 | 1 | 0 | -1/6 | 1/6 |

**Aufgabe 4.1** Man gebe sowohl die klassische Simpsonregel auf dem Grundintervall $[0,1]$ an, als auch deren Transformierte auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

**Aufgabe 4.2** Es gelte

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{2} a_i f(x_i) = Q(f)$$

mit $x_0 = -\sqrt{3/5},\ x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3/5}$.

(a) Man berechne die Gewichte $a_0,\ a_1$ und $a_2$ zur interpolatorischen Quadraturformel $Q(f)$.

(b) Man bestimme das maximale $n \in \mathbb{N}_0$, sodass alle Polynome $p \in \mathbb{P}_n$ durch $Q(f)$ exakt integriert werden.

**Aufgabe 5.1** Es gelte $PA = LR$ mit Permutationsmatrix $P$.

(a) Wie hilft das bei der Lösung von $Ax = b$ weiter?

(b) Wie lässt sich damit leicht die Determinante von $A$ bestimmen?

**Aufgabe 5.2** Man finde $P,\ L$ und $R$, sodass $PA = LR$ gilt

(a) $\begin{pmatrix} -3 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -3 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 5.3** Es gelte $A^T = A = LDL^T \succ 0$ mit Diagonalmatrix $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots d_n)$.

(a) Wie hilft das bei der Lösung von $Ax = b$ weiter?

(b) Wie lässt sich damit leicht die Determinante von $A$ bestimmen?

**Aufgabe 6.1** Man finde $D,\ L$ und $\tilde{L}$, sodass $A = LDL^T$ und $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$ gilt

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -8 & 12 \\ -8 & 17 & -24 \\ 12 & -24 & 45 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 25 & 100 & 0 \\ 100 & 401 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 6.2** Man finde $Q$ und $R$ mithilfe von Gram-Schmidt, sodass $A = QR$ gilt mit orthogonaler Matrix $Q$.

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 6.3** Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) Man bestimme $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$, $\|A\|_F$ und $\|A\|_2$.

(b) Ist die Frobenius-Norm $\|\cdot\|_F$ durch eine Vektor-Norm induziert?

**Aufgabe 7.1** Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Man berechne mittels der Householder-Reflexion die vollständige $QR$-Zerlegung.

(b) Man gebe mithilfe von (a) auch die reduzierte $QR$-Zerlegung an.

**Aufgabe 7.2** Man berechne mittels Givens-Rotation die $QR$-Zerlegung für

$$A^{(1)} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 3 & 0 \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 8.1** Gesucht ist eine Nullstelle von $p(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 4x + 1$. Man gebe ausgehend von $x_0 = 3$ die ersten beiden Iterierten des Newton-Verfahrens an.

**Aufgabe 8.2** Man zeige: Das Newton-Verfahren zur Approximation der Minimalstelle von $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$ konvergiert in einem Schritt.

**Aufgabe 8.3** Man betrachte das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = 4 \\ x_1^3 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

(a) Man finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, deren Nullstellen genau die Lösungen dieses Gleichungssystems sind.

(b) Man berechne ausgehend von $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zwei Iterationen des Newton-Verfahrens.

**Aufgabe 8.4** Man betrachte das überbestimmte System $Ax = b$ und minimiere $\|Ax - b\|$ mithilfe

(a) der Normalengleichung

(b) der reduzierten $QR$-Zerlegung

**Aufgabe 8.5** Man zeige für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x/2)$, dass die Folge $x_{k+1} = \phi(x_k)$ mit $k \geq 0$ für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert.