Lösungsvorschlag für Klausur A

Aufgabe 1:

(a) Mit Hilfe der arithmetischen Summenformel gilt

$$x_1 = \frac{1}{10}\sum_{i=20}^{40} i = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{40} i - \sum_{i=1}^{19} i\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{40\cdot 41}{2} - \frac{19\cdot 20}{2}\right) = 2\cdot 41 - 19 = 63.$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel gilt

$$x_2 = \frac{2}{1000}\sum_{j=0}^{9} 3^j = \frac{2}{1000}\cdot\frac{3^{9+1}-1}{3-1} = \frac{2}{1000}\cdot\frac{3^{10}-1}{2} = \frac{3^{10}-1}{1000} = \frac{59048}{1000} = 59.048.$$

(b) Es gilt $x_3 = 58 + 0.\overline{1}$. Wir setzen $y = 0.\overline{1}$. Dann gilt

$$9y = 10y - y = 1.\overline{1} - 0.\overline{1} = 1,$$

d.h. $y = \frac{1}{9}$. Daraus folgt

$$x_3 = 58 + y = 58 + \frac{1}{9} = \frac{523}{9}.$$

Aufgabe 2:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x+7} = x - 5$. Quadrieren wir beide Seiten, so folgt $x + 7 = (x-5)^2$, d.h. $x + 7 = x^2 - 10x + 25$. Also

$$x^2 - 11x + 18 = 0.$$

Mit der p-q-Formel folgt $x = 2$ oder $x = 9$. Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung erhalten wir, das $x = 9$ die einzige Lösung der Gleichung $\sqrt{x+7} = x - 5$ ist.

(b) Es gilt $x^3 + 2x^2 - x = x(x^2 + 2x - 1)$. Also gilt

$$x^3+2x^2-x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x^2+2x-1 = 0 \overset{\text{p-q-Formel}}{\Leftrightarrow} x = 0 \text{ oder } x = -1+\sqrt{2} \text{ oder } x = -1-\sqrt{2}.$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{-1-\sqrt{2}, 0, -1+\sqrt{2}\}$.

(c) Die Gleichung $\lg(4x) = \lg(x-1) + \lg(x+1)$ ist nur für $x > 1$ definiert. Sei also $x > 1$ mit $\lg(4x) = \lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg((x-1)(x+1))$. Dann gilt $4x = (x-1)(x+1)$ und somit $x^2 - 4x - 1 = 0$. Mit der p-q-Formel folgt $x = 2 + \sqrt{5}$ oder $x = 2 - \sqrt{5}$. Da die Gleichung für $x = 2 - \sqrt{5}$ nicht definiert ist, folgt, dass $x = 2 + \sqrt{5}$ die einzige Lösung der Gleichung ist.

Aufgabe 3:

(a) Mit der p-q-Formel erhält man, dass $x = 1$ und $x = -5$ die Lösungen von $x^2 + 4x - 5 = 0$ sind. Damit gilt $x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$. Also gilt

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 < 0 \;&\Leftrightarrow\; (x-1<0 \text{ und } x+5>0) \text{ oder } (x-1>0 \text{ und } x+5<0) \\ &\Leftrightarrow -5 < x < 1 \text{ oder } (x > 1 \text{ und } x < -5). \end{aligned}$$

Es folgt $\mathbb{L} =]-5, 1[$.

(b) Da $1+x^2>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und die Ungleichung für $x=\pm 1$ nicht definiert ist, genügt es, die folgenden Fälle zu unterscheiden.
1.Fall: $1-x^2>0$, d.h. $-1<x<1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2} > -\frac{x}{1-x^2} \text{ und } -1<x<1 &\Leftrightarrow x(1-x^2) > -x(1+x^2) \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow 2x>0 \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow 0<x<1.\end{aligned}$$

2.Fall: $1-x^2<0$, d.h. $x<-1$ oder $x>1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x}{1+x^2} > -\frac{x}{1-x^2} \text{ und } (x>1 \text{ oder } x<-1) &\Leftrightarrow x(1-x^2) < -x(1+x^2) \text{ und } (x>1 \text{ oder } x<-1)\\ &\Leftrightarrow 2x<0 \text{ und } (x>1 \text{ oder } x<-1)\\ &\Leftrightarrow x<-1.\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbb{L}=]-\infty,-1[\cup]0,1[$.

(c) Wir unterscheiden zwei Fälle.
1.Fall: $x+1\geq 0$, d.h. $x\geq -1$. Dann gilt

$$|x+1|>2x-1 \text{ und } x\geq -1 \iff x+1>2x-1 \text{ und } x\geq -1 \iff -1\leq x<2.$$

2.Fall: $x+1<0$, d.h. $x<-1$. Dann gilt

$$|x+1|>2x-1 \text{ und } x<-1 \Leftrightarrow -(x+1)>2x-1 \text{ und } x<-1 \Leftrightarrow x<0 \text{ und } x<-1 \Leftrightarrow x<-1.$$

Somit gilt $\mathbb{L}=]-\infty,2[$.

Aufgabe 4:

(a) Es gilt

$$\det(A_x) \overset{\substack{\text{Entw. nach}\\ \text{2. Zeile}}}{=} (-1)^{2+2}\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\x&0&2\end{pmatrix} = (-1)\cdot(2+x) = -2-x.$$

(b) Es gilt

$$\det(A_x)\neq 0 \Leftrightarrow -2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2.$$

(c) Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $\det(A_x)\neq 0$ und sei $B_x\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ die Matrix, die aus A_x entsteht, wenn man die ersten beiden und die letzten beiden Zeilen von A_x vertauscht. Dann gilt

$$\det(B_x)=\det(A_x).$$

Daraus folgt

$$\det(3A_xB_x^{-1}) = 3^4\cdot\det(A_x)\cdot\frac{1}{\det(B_x)} = 81\cdot\det(A_x)\cdot\frac{1}{\det(A_x)} = 81.$$

Aufgabe 5: Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

(a) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-\text{III}]{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}\cdot\frac{1}{3}]{\text{I}-a\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -a & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & a-\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

und wir erhalten

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a-\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{II}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{I}-\text{II}]{\text{III}-\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}\leftrightarrow\text{III}]{\text{I}\leftrightarrow\text{IV}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}\cdot\frac{1}{a}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

und wir erhalten

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

(a) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $x_2 = r, x_4 = s, x_5 = t$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$x_3 = x_4 + ax_5 = s + at$$

und

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -r - s - at.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -r-s-at \\ r \\ s+at \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid r,s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a & 1 \end{array}\right) \overset{\text{II}-\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a & 1 \end{array}\right) \overset{\text{III}+\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Aus der letzten Zeile erhalten wir einen Widersruch. Also hat das lineare GLS $Ax = (0,1,1)^T$ keine Lösung.

(c) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -1 \end{array}\right) \overset{\text{II}-\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -a & -1 \end{array}\right) \overset{\text{III}+\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $x_2 = r, x_4 = s, x_5 = t$ mit $r,s,t \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$x_3 = -1 + x_4 + ax_5 = -1 + s + at$$

und

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -r + 1 - s - at.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-r-s-at \\ r \\ -1+s+at \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid r,s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 7:

(a) Es gilt

$$||u_2|| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

und

$$||u_4|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Außerdem gilt

$$||u_2 + u_4|| = ||(2,0,2,0)^T|| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}.$$

(b) Beispielsweise gilt

$$u_1 + u_3 - u_4 = 0.$$

Setzen wir also $r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 1, r_4 = -1$, so folgt $\sum_{i=1}^4 r_i u_i = 0$.

(c) Es gilt

$$u_2 \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -t \\ 4t \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-t) + (-1) \cdot 4t = 0 \;\Leftrightarrow\; -4 - 5t = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -\frac{4}{5}.$$

Also ist u_2 nur für $t = -\frac{4}{5}$ orthogonal zu $(0, 4, -t, 4t)^T$.

Aufgabe 8:

(a) Es gilt

$$K_3 = 1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.05 \cdot 10000\,€ = 11031.30\,€\ .$$

(b) Der Zinssatz p_* ist gegeben durch

$$\left(1 + \frac{p_*}{100}\right)^3 = 1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.05.$$

Daraus folgt

$$p_* = 100(\sqrt[3]{1.02 \cdot 1.03 \cdot 1.05} - 1) \approx 3.325\%.$$

Aufgabe 9: Es ist $R_0 = 100\,000$ € und $N = 10$.

(a) (i) (lineare Abschreibung) Die Abschreibungsrate ist gegeben durch

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = \frac{R_0}{N} = 10\,000\,€$$

Somit erhalten wir $R_4 = R_0 - 4 \cdot a_1 = 60\,000$ € .

(ii) (2 Jahre degressive Abschreibung und anschließend 2 Jahre lineare Abschreibung) Die Abschreibungsrate a_1 ist gegeben durch

$$a_1 = \frac{20}{100} R_0 = 20\,000\,€\ .$$

Dann gilt $R_1 = R_0 - a_1 = 80\,000$ € . Die Abschreibungsrate a_2 ist gegeben durch

$$a_2 = \frac{20}{100} R_1 = 16\,000\,€\ .$$

Dann gilt $R_2 = R_1 - a_2 = 64\,000$ € . Wir erhalten

$$a_3 = \frac{R_2}{10 - 2} = \frac{64\,000}{8}\,€ = 8\,000\,€\ .$$

Damit gilt $R_4 = R_2 - 2 \cdot 8000$ € $= 48\,000$ € .

(b) Der Wechsel im $(n+1)$-Jahr von degressiver zu linearer Abschreibung ist genau dann optimal, wenn erstmalig

$$p(N - n) \leq 100$$

gilt. Hier gilt

$$20(10 - n) \leq 100$$

erstmalig für $n = 5$, d.h. der Wechsel von degressiver zu linearer Abschreibung ist im 6. Jahr optimal.

Aufgabe 10: Gesucht ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit

$$1.05^n \cdot 500000 - \frac{1.05^n - 1}{0.05} \cdot 50000 < 50000.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 1.05^n \cdot 500000 - \frac{1.05^n - 1}{0.05} \cdot 50000 < 50000 &\iff 1,05^n \left(500000 - \frac{50000}{0.05}\right) < 50000 - \frac{50000}{0.05} \\ &\iff -500000 \cdot 1.05^n < -950000. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$1.05^n > \frac{-950000}{-500000} = \frac{19}{10}$$

und somit

$$n > \frac{\ln \frac{19}{10}}{\ln 1.05} \approx 13,155.$$

Es kann also 14 Jahre lang eine Rente von 50 000 **€** gezahlt werden.