Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. DR. AXEL GRÜNROCK

WS 2012/13
08.02.2013

Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler (A)

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst injektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   b) Zwischen dem arithmetischen Mittel AM, dem geometrischen Mittel GM und dem quadratischen Mittel QM bestehen immer die Ungleichungen $AM \leq GM \leq QM$.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   c) Ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ und $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, so ist $AB \in \mathbb{R}^{4\times 7}$.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   d) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann regulär, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung besitzt.
   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(6 P.)** Bestimmen Sie das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der Zahlen $1, 2, 4, 8$ und 16.

3. **(4×2 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

   a) $x^2 + 6 = 5x$ b) $2 \leq x + \dfrac{1}{x}$
   c) $|x + 2| < 2x$ d) $\sqrt{x+3} = x + 1.$

Bitte wenden!

4. **(3+3 P.)** Drei Unternehmen stellen vergleichbare Produkte P_1, P_2 und P_3 her, die bei Markteinführung von jeweils 12000 Kunden gekauft werden. Im darauffolgenden Jahr wechseln $\frac{1}{3}$ der Käufer von P_1 zu P_2, $\frac{1}{6}$ von P_1 zu P_3, $\frac{1}{4}$ von P_2 zu P_3 und von P_2 zu P_1, während alle Kunden von P_3 diesem Produkt treu bleiben. Die Gesamtzahl aller Kunden bleibt gleich. Bestimmen Sie
   a) die Übergangsmatrix für die beschriebene Kundenwanderung,
   b) die Marktverteilungsvektoren zu Beginn und nach einem Jahr.

5. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (1, 0, -1)^{\top}, y = (1, 3, 2)^{\top}$ und $z = (3, -3, 3)^{\top}$ berechne man
   a) $|y|$ und $|z|$,
   b) $|x - y|^2$ und $|z + 3x|^2$,
   c) $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$.

6. **(6 P.)** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x - y \phantom{{}- 2z} &= 1 \\ x \phantom{{}- y} - 2z &= 2 \\ -x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

7. **(9 P.)** Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   und für $k \in \mathbb{Z}$ berechne man A^k. Bestimmen Sie auch $\det(A)$.

8. **(1+2+2+2+4 P.)** Gegeben sei die 2×2-Matrix $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie
   a) die Determinante von R,
   b) die inverse Matrix R^{-1},
   c) das charakteristische Polynom $P_R(t)$ dieser Matrix,
   d) die Eigenwerte von R und
   e) die dazugehörenden Eigenräume.

Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Klausur A

Aufgabe 1 (8 Punkte)

a) falsch

b) falsch

c) richtig

d) richtig

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Richtiges Ergebnis je 2 Punkte
(richtige Formel bei falschem Ergebnis je 1 Punkt)

- $AM(1,2,4,8,16) = \frac{1+2+4+8+16}{5} = \underline{\underline{6{,}2}}$ o. $\underline{\underline{\left(\frac{31}{5}\right)}}$
- $HM(1,2,4,8,16) = \frac{5}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}} = \underline{\underline{\frac{80}{31}}}$
- $GM(1,2,4,8,16) = (1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16)^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{4}}$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Richtiges Ergebnis je 2 Punkte
(Falsches Ergebnis, richtiger Lösungsansatz je 1 Punkt)

a)	$\mathbb{L} = \{2,3\}$	Ansatz: p-q-Formel
b)	$\mathbb{L} = \{x : x > 0\} = (0,\infty)$	Multiplikation mit x, Fallunterscheidung $x>0$, $x<0$
c)	$\mathbb{L} = \{x : x > 2\} = (2,\infty)$	Beträge richtig auflösen, $x \geq -2$, $x < -2$ unterscheiden
d)	$\mathbb{L} = \{1\}$	Quadrieren, quadr. Gleichung lösen

Klausur A

<u>Aufgabe 4</u> (6 Punkte)

a) Je richtiger Spalte der Übergangsmatrix 1 Punkt
(3 Punkte)
(Keine richtige Spalte, aber Spaltensummen
alle 1 = 1 Punkt)

$$\text{Übergangsmatrix } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

b)
(3 Punkte)
Richtiger Marktverteilungsvektor zu Beginn

$$x = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 12\,000 \\ 12\,000 \end{pmatrix} \qquad 1 \text{ Punkt}$$

Richtiger MV-Vektor nach einem Jahr

$$Ax = \begin{pmatrix} 9000 \\ 10000 \\ 17000 \end{pmatrix} \qquad 2 \text{ Punkte}$$

Klausur A

<u>Aufgabe 5</u> (6 Punkte)

je richtigen Ergebnis 1 Punkt

- $|y| = \sqrt{14}$
- $|z| = \sqrt{27}$
- $|x-y|^2 = 18$
- $|z+3x|^2 = 45$
- $\langle x,y\rangle = -1$
- $\langle y,z\rangle = 0$

Klausur A

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Richtiges Ergebnis 6 Punkte $\boxed{\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Ansonsten

- Koeffizientenmatrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ 1P

- Umformungen angeben $② \longrightarrow ② - ①$, $③ \longrightarrow ③ + ①$ 1P

- Richtig ausführen

  2. Zeile richtig 1 P

  3. Zeile richtig 1P

Die Matrix sieht dann so aus: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

Bei alternativen Lösungen ggf. nachfragen

Klausur A   Aufgabe 7   (9 Punkte)

- $\det(A) = 1$ 1 Punkt

- $A^{3l} = E_3 \,, \ l \in \mathbb{Z}$
  $A^{3l+1} = A \,, \ l \in \mathbb{Z}$
  $A^{3l+2} = A^2 \,, \ l \in \mathbb{Z}$
  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 8 Punkte

9 Punkte

Bei fehlenden Teilen:

- $A^0 = E_3$ 1 Punkt

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

$A^3 = E_3$ 2 Punkte

$A^{3l} = E_3 \,, \ l \in \mathbb{Z}$ 1 Punkt

$A^{3l+1} = A \,, \ l \in \mathbb{Z}$ 1 Punkt

$A^{3l+2} = A^2 \,, \ l \in \mathbb{Z}$ 1 Punkt

$\det(A) = 1$ 1 Punkt

Klausur A

<u>Aufgabe 8</u> (11 Punkte)

a) $\det(R) = 2$ <u>1 Punkt</u>

b) $R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ <u>2 Punkte</u>

c) $P_R(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 3 \\ 0 & 2-t \end{pmatrix} = (t-1)(t-2)$ <u>2 Punkte</u>

(Falsches Polynom, richtige Ausgangsformel noch 1P)

d) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ <u>2 Punkte</u> (je 1P)

e) $E_{\lambda_2} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3y = x\right\}$

oder $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ <u>2 Punkte</u>

$E_{\lambda_1} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$

oder $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$ <u>2 Punkte</u>

(<u>Pro</u> richtiger Ausgangsformel für E_{λ_i} bei falschem Ergebnis noch <u>1 P</u>)