Mathematisches Institut
der Heinrich–Heine–Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner
Dipl. Math. C. Axler

WS 2011/2012
06.02.2012

Klausur zu "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I"
Gruppe B

1. (10 P.) Es seien
$$y_1 = 2 \cdot \sum_{j=0}^{8} 3^j, \qquad y_2 = \sum_{i=20}^{50} i, \qquad y_3 = 2,\overline{2}.$$
   (a) Berechnen Sie y_1 und y_2.
   (b) Stellen Sie y_3 als gewöhnlichen Bruch dar.

2. (10 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:
   (a) $\sqrt{x+7} = -x + 5$.
   (b) $x^3 - 2x^2 - x = 0$.
   (c) $\ln(4x) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$.

3. (10 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen:
   (a) $x^2 - 4x < 5$.
   (b) $\dfrac{x}{1+x^2} - \dfrac{x}{1-x^2} > 0$.
   (c) $|x+1| < 2x - 1$.

4. (10 P.) Sei
$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$
   (a) Berechnen Sie die Determinante von A_x.
   (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A_x) \neq 0$ ist.
   (c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\det(A_x) \neq 0$ und sei $B_x \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ die Matrix, die aus A_x entsteht, wenn man die ersten beiden und die letzten beiden Spalten von A_x vertauscht. Bestimmen Sie die Determinante $\det(2A_x^{-1}B_x)$.

5. (10 P.) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix
$$\text{(a)} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(b)} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (10 P.) Es seien $a \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, falls

(a) $b = (0,0,0)^T$.

(b) $b = (0,1,1)^T$.

(c) $b = (0,1,-1)^T$.

7. (10 P.) Seien $u_1 = (1,-1,0,0)^T, u_2 = (1,-1,1,-1)^T, u_3 = (0,0,1,-1)^T, u_4 = (1,1,1,1)$ Vektoren im $\mathbb{R}^4$.

(a) Berechnen Sie $||u_2||, ||u_4||$ und $||u_2 + u_4||$.

(b) Bestimmen Sie reelle Zahlen $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$, nicht alle $r_i = 0$, mit $\sum_{i=1}^{4} r_i u_i = 0$.

(c) Bestimmen Sie alle reelle Zahlen $t \in \mathbb{R}$, so dass u_2 orthogonal zu $(0,3,-t,3t)$ ist.

8. (10 P.) Ein Betrag von 10 000 € wird für 3 Jahre angelegt. Die jährlich steigenden Zinsen betragen erst 2% p.a., dann 4% p.a. und schließlich 5% p.a.

(a) Wie hoch ist die Endsumme nach 3 Jahren, wenn die Zinsen stehen bleiben (d.h. mit Zinseszins)?

(b) Mit welchem für die 3 Jahre festen Zinssatz p_* hätte man die gleiche Rendite erreicht?

9. (10 P.) Der Anfangswert eines Wirtschaftsgutes betrage 200 000 €, die Nutzungsdauer (nach AfA) 10 Jahre.

(a) Berechnen Sie die Abschreibungsrate a_1 und den Restwert R_4 nach 4 Jahren

  (i) bei linearer Abschreibung.

  (ii) bei degressiver Abschreibung mit 20% in den ersten beiden Jahren und anschließender linearer Abschreibung des Restwertes R_2 in den restlichen Jahren.

(b) Wann wäre der optimale Übergang von degressiver zu linearer Abschreibung?

10. (10 P.) Wieviele Jahre kann aus einem mit 5% p.a. verzinsten Guthaben von 600 000 € eine Jahresrente von 60 000 € nachschüssig gezahlt werden?