Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

WS 2012/13
08.02.2013

Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler (B)

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

   a) Ist $A \in \mathbb{R}^{4\times 6}$ und $B \in \mathbb{R}^{6\times 7}$, so ist $AB \in \mathbb{R}^{4\times 7}$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann regulär, wenn das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung besitzt.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   c) Zwischen dem arithmetischen Mittel AM, dem geometrischen Mittel GM und dem quadratischen Mittel QM bestehen immer die Ungleichungen $AM \le GM \le QM$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   d) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heisst injektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(6 P.)** Bestimmen Sie das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der Zahlen $\frac{1}{3}, 1, 3, 9$ und 27.

3. **(4×2 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

   a) $x^2 + 4 = 5x$ b) $4 \le x + \dfrac{4}{x}$

   c) $|x+1| < 4x$ d) $\sqrt{x} = x - 2$.

Bitte wenden!

4. **(3+3 P.)** Drei Unternehmen stellen vergleichbare Produkte P_1, P_2 und P_3 her, die bei Markteinführung von jeweils 120 Kunden gekauft werden. Im darauffolgenden Jahr wechseln $\frac{1}{3}$ der Käufer von P_2 zu P_1, $\frac{1}{2}$ von P_2 zu P_3, $\frac{1}{4}$ von P_3 zu P_1 und von P_3 zu P_2, während alle Kunden von P_1 diesem Produkt treu bleiben. Die Gesamtzahl aller Kunden bleibt gleich. Bestimmen Sie
   a) die Übergangsmatrix für die beschriebene Kundenwanderung,
   b) die Marktverteilungsvektoren zu Beginn und nach einem Jahr.

5. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (1,2,2)^\top, y = (-2,0,1)^\top$ und $z = (1,-6,0)^\top$ berechne man
   a) $|y|$ und $|z|$,
   b) $|x-y|^2$ und $|z+3x|^2$,
   c) $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, z\rangle$.

6. **(6 P.)** Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + y \quad\quad &= 3 \\ -2x + 2y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

7. **(9 P.)** Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   und für $k \in \mathbb{Z}$ berechne man A^k. Bestimmen Sie auch $\det(A)$.

8. **(1+2+2+2+4 P.)** Gegeben sei die 2×2-Matrix $R = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie
   a) die Determinante von R,
   b) die inverse Matrix R^{-1},
   c) das charakteristische Polynom $P_R(t)$ dieser Matrix,
   d) die Eigenwerte von R und
   e) die dazugehörenden Eigenräume.

Die Klausur gilt mit 24 (von 60 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Klausur B

Aufgabe 1
(8 Punkte)

a) richtig
b) richtig
c) falsch
d) falsch

Aufgabe 2
(6 Punkte)

Richtiges Ergebnis je 2 Punkte
(richtige Formel bei falschem Ergebnis je 1 Punkt)

- $AM\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27\right) = \frac{\frac{1}{3}+1+3+9+27}{5} = \underline{\underline{\frac{121}{15}}}$
- $GM\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27\right) = \left(\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 3\cdot 9\cdot 27\right)^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{3}}$
- $HM\left(\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27\right) = \frac{5}{3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}} = \underline{\underline{\frac{135}{121}}}$

Aufgabe 3
(8 Punkte)

Richtiges Ergebnis je 2 Punkte
(Falsches Ergebnis, richtiger Lösungsansatz je 1 Punkt)

a) $\mathbb{L} = \{1, 4\}$	Ansatz: p-q-Formel
b) $\mathbb{L} = \{x : x > 0\} = (0, \infty)$	Multiplikation mit x Fallunterscheidung $x > 0$, $x < 0$
c) $\mathbb{L} = \{x : x > \frac{1}{3}\} = (\frac{1}{3}, \infty)$	Beträge richtig auflösen $x \geq -1$, $x < -1$ unterscheiden
d) $\mathbb{L} = \{4\}$	Quadrieren, quadr. Gleichung lösen

Klausur B

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) (3 Punkte)

Je richtiger Spalte der Übergangsmatrix 1 Punkt

(keine richtige Spalte, aber Spaltensummen alle 1 = 1 Punkt)

Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) (3 Punkte)

Richtiger Marktverteilungsvektor zu Beginn

$x = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 120 \end{pmatrix}$ 1 Punkt

Richtiger MV-Vektor nach einem Jahr

$Ax = \begin{pmatrix} 190 \\ 50 \\ 120 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

Klausur B

Aufgabe 5 (6 Punkte)

je richtigem Ergebnis 1 Punkt

- $|y| = \sqrt{5}$
- $|z| = \sqrt{37}$
- $|x-y|^2 = 14$
- $|z+3x|^2 = 52$
- $\langle x, y\rangle = 0$
- $\langle y, z\rangle = -2$

Klausur B

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Richtigen Ergebnis 6 Punkte $\boxed{\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Ansonsten

- Koeffizientenmatrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ 1P

- Umformungen angeben (2) → (2) + (1)
  (3) → (3) − (1) 1P

- Richtig ausführen
  2. Zeile richtig 1P
  3. Zeile richtig 1P

Die Matrix sieht dann so aus: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$

Bei alternativen Lösungen ggf. nachfragen

Klausur B <u>Aufgabe 7</u> (9 Punkte)

- $\det(A) = 1$ <u>1 Punkt</u>

- $A^{3l} = E_3 \quad , l \in \mathbb{Z}$
  $A^{3l+1} = A \quad , l \in \mathbb{Z}$
  $A^{3l+2} = A^2 \quad , l \in \mathbb{Z}$
  $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  <u>8 Punkte</u>

<u>9 Punkte</u>

<u>Bei fehlenden Teilen</u>

- $A^0 = E_3$ <u>1 Punkt</u>
- $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <u>2 Punkte</u>
- $A^3 = E_3$ <u>2 Punkte</u>

$A^{3l} = E_3, \ l \in \mathbb{Z}$ <u>1 Punkt</u>

$A^{3l+1} = A, \ l \in \mathbb{Z}$ <u>1 Punkt</u>

$A^{3l+2} = A^2, \ l \in \mathbb{Z}$ <u>1 Punkt</u>

$\det(A) = 1$ <u>1 Punkt</u>

Klausur B

Aufgabe 8 (11 Punkte)

a) $\det(R) = 3$ 1 Punkt

b) $R^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2 Punkte

c) $P_R(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)$ 2 Punkte

(Falsches Polynom, richtige Ausgangsformel noch 1 P)

d) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$ 2 Punkte (je 1 P)

e) $E_{\lambda_1} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = -y\right\}$ 2 Punkte

oder $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$

$E_{\lambda_2} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\}$ 2 Punkte

oder $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R}\right\}$

(Pro richtiger Ausgangsformel für E_{λ_i} bei falschem Ergebnis noch 1 P)