Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Wintersemester 2012/2013

Kapitel 1: Grundlagen

1.1 Mengen und Abbildungen

Grundlegend für die gesamte Mathematik ist der Begriff der Menge. Er wurde von Georg Cantor folgendermaßen eingeführt:

Def.: Eine Menge ist die Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte in einer Menge werden ihre Elemente genannt. Es muß stets entscheidbar sein, ob ein Element zu einer Menge gehört oder nicht.

Schreibweisen: (a) aufzählend, insbes. für endliche Mengen, z.B.

sog. Mengenklammern

$M_1 = \{a, b, 3, \Delta, ?\}$,

aber auch für unendliche Mengen wie

$M_2 = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,

wenn ein Bildungsgesetz eindeutig erkennbar ist;

(b) durch Angabe einer charakteristischen Eigenschaft der Elemente in der Form

$\{x : x$ hat die Eigenschaft $E\}$

oder kurz $\{x : E(x)\}$. Z.B. können wir die Menge M_2 auch in der Form

$$M_2 = \{x : x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\}$$

angeben.

"wohlunterschieden" in der Def. bedeutet z.B., daß

$$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\},$$

erscheint ein Element zweimal in der Aufzählung, wird es dennoch nur als ein Element der Menge betrachtet.

Ferner kommt es auf die Reihenfolge der Angabe der Elemente einer Menge nicht an, z.B. gilt

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\} = \{2, 3, 1\} = \ldots$$

und $\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{2, 6, 4, 10, 8, 12, 14, \ldots\} = \ldots$

Gehört ein Objekt x zu einer Menge M, so schreibt man $x \in M$ (gelesen: "x Element M"), andernfalls: $x \notin M$ ("x nicht Element M").

Die Menge, die kein Element enthält, heißt die leere Menge und wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Beziehungen zwischen Mengen M und N:

(1) M ist Teilmenge von N – in Zeichen: $M \subset N$ – genau dann, wenn alle Elemente von M zugleich in N enthalten sind. Kurzschreibweise:

$$M \subset N \;:\Longleftrightarrow\; (x \in M \Longrightarrow x \in N)$$

zeigt eine Definition an

äquivalent, genau dann, wenn

Implikation, aus ... folgt ...

(2) $M = N$ (M und N sind identisch) genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$ gilt, d.h., wenn beide Mengen dieselben Elemente besitzen.

<u>Mengenoperationen</u>: M und N seien solche Mengen.

(1) (Durch-) Schnitt: $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$;

(2) Vereinigung: $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$;

(3) Differenz: $M \setminus N = \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$.

"ohne"

Für Durchschnitt und Vereinigung gelten die folgenden Rechenregeln:

- $M \cup N = N \cup M$ und $M \cap N = N \cap M$ ("Kommutativgesetze")
- $M \cup (N \cup A) = (M \cup N) \cup A$ (A sei eine weitere Menge) und $M \cap (N \cap A) = (M \cap N) \cap A$ ("Assoziativgesetze")
- $M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B)$ und $M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B)$ ("Distributivgesetze").

ist eine Grundmenge X ausgezeichnet, können wir auch das Komplement einer Menge definieren:

(4) Komplement: $M^c := \{x \in X : x \notin M\}$

Zusammenhang zur Differenz: $M \setminus N = M \cap N^c$, wenn $M, N \subset X$.

Den Zusammenhang zwischen Komplement, Vereinigung und Durchschnitt stellen die <u>De-Morgan'schen Regeln</u> her:

$(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$ und $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$

Durch Komplementbildung werden also Durchschnitte in Vereinigungen überführt und umgekehrt.

Eine weitere häufig verwendete Mengenoperation ist

(5) kartesisches Produkt: $M \times N = \{\underbrace{(x,y)}_{\text{Paar}} : x \in M, y \in N\}$,

allgemeiner: $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{n\text{-Tupel}} : x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n\}$

Auch die Bildung des kartesischen Produkts ist mit Schnitt und Vereinigung verträglich. Es gelten:

$M \times (N_1 \cup N_2) = (M \times N_1) \cup (M \times N_2)$ sowie

$M \times (N_1 \cup N_2) = (M \times N_1) \cap (M \times N_2)$.

Das kartesische Produkt ist jedoch <u>nicht</u> kommutativ!

Neben dem Mengenbegriff wird uns auch der Begriff der Abbildung häufig begegnen:

__Def.__: Gegeben seien zwei Mengen M und N. Unter einer __Abbildung__ oder einer __Funktion__

$$f: M \to N \qquad (\text{"von } M \text{ nach } N\text{'})$$

verstehen wir eine Vorschrift, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet.

__Bem.__: Zur genauen Festlegung einer Abbildung sind __drei__ Angaben zu machen

(i) der Definitionsbereich M,

(ii) der Zielbereich N und

(iii) die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto f(x)$.

Typischerweise: $f: M \to N,\ x \mapsto f(x) = \ldots$ (Zuordnungsvorschrift)

Zur Anschaulichen Darstellung einer Abbildung verwendet man häufig den Graphen von f; dies ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von Definitions- und Zielbereich:

__Def.__: Es sei $f: M \to N,\ x \mapsto f(x)$ eine Abbildung. Dann heißt

$$G_f := \{(x,y) \in M \times N : y = f(x)\}$$

der __Graph__ von f.