1.4 Auflösen von Gleichungen

Hier betrachten wir einfache Gleichungen mit einer reellen Unbekannten x.

(1) Lineare Gleichung: $ax = b$, hierbei $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben, $x \in \mathbb{R}$ die gesuchte Lösung. 3 Fälle:

(a) $a = b = 0$: Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung.

(b) $a = 0 \neq b$: Es existiert keine Lösung.

(c) $a \neq 0$: $x = \frac{b}{a}$ ist die einzige Lösung.

(2) Gebrochen lineare Gleichung: $\frac{ax+b}{cx+d} = r$, dabei $a, b, c, d, r \in \mathbb{R}$ gegeben, $x \in \mathbb{R}$ gesucht.

Falls $cx + d = 0$ ist, ist die linke Seite nicht definiert, $x = -\frac{d}{c}$ ist also keine Lösung.

Unter der Voraussetzung $x \neq -\frac{d}{c}$ hat man:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = r \iff ax + b = r(cx+d) = rcx + rd$$

$$\iff (a - rc)x = -b + rd$$

Die Lösungen dieser linearen Gleichung findet man wie in (1) beschrieben.

Bsp.: $\frac{x+1}{x-1} = 2 \iff x + 1 = 2x - 2$ und $x \neq 1$

$$\iff x = 3$$

(3) Quadratische Gleichung: $ax^2+bx+c=0$, dabei $a \in \mathbb{R}_* (=\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $b,c \in \mathbb{R}$; x gesucht.

Lösung durch "quadratische Ergänzung"

$$0 = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Jetzt sind 3 Fälle zu unterscheiden:

(i) $b^2-4ac<0$: keine Lösung;

(ii) $b^2-4ac=0$: es gibt genau eine Lösung, nämlich $x=-\frac{b}{2a}$;

(iii) $b^2-4ac>0$: es gibt genau zwei Lösungen $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

Für die Normalform $x^2+px+q=0$ vereinfacht sich diese Lösungsformel zu $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

Bsp.: $2x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$

$$\Rightarrow x_{1,2} = +\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+6} = -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+24}$$

$$= +\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}$$

Also hat man die Lösungen $x_1=3$ und $x_2=-2$

Bem. Liegt eine quadratische Gleichung in der Form $(x-r)(x-q)=0$ vor, so gilt $x=r$ oder $x=q$. Nicht ausmultiplizieren!

(4) Gleichungen, die Wurzeln enthalten

Keine Lösungsformel, lediglich eine "Strategie"

- Wurzeln isolieren,
- durch Quadrieren (bzw. Potenzieren bei n-ten Wurzeln) diese entfernen.
- Anschließend ist in der Regel eine quadratische Gleichung (i. allg. eine Polynomgleichung, s.u.) zu lösen.

Bsp. 1: $x - \sqrt{2x+3} = 0 \iff x = \sqrt{2x+3}$

$\implies x^2 = 2x+3$ (Vorsicht! Hier wird die Lösungsmenge vergrößert.)

$\iff x^2 - 2x - 3 = 0 \underset{(3)}{\implies} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

Aber: Nur $x = 3$ löst $x = \sqrt{2x+3}$.

Treten mehrere Wurzeln in einer Gleichung auf, muß man ggf. mehrfach quadrieren.

Bsp. 2: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 3$ (Quadrieren)

$\implies x - 1 + 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} + x - 4 = 9$ (Wurzeln isolieren)

$\iff 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4} = 14 - 2x$ (: 2)

$\iff \sqrt{x-1}\sqrt{x-4} = 7 - x$ (Quadrieren)

$\implies x^2 - 5x + 4 = x^2 - 14x + 49$

$\iff 9x = 45 \iff x = 5$,

was sich tatsächlich als Lösung erweist.

(5) Polynomgleichungen: $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$

mit $n \geq 2$ und $a_n \neq 0$.

- Besitzt höchstens n Lösungen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- $n = 2$: quadratisch, s.o.
- $n = 3, 4$: es existieren unhandliche Lösungsformeln
- $n \geq 5$: nicht systematisch lösbar

Spezialfälle:

(a) Biquadratische Gleichung: $x^4 + p x^2 + q = 0$.

Für $z = x^2$ hat man dann die quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit den (möglichen) Lösungen $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Sind diese nicht-negativ, erhält man als Lösungen der biquadratischen Gleichung $x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$.

(b) Reduktion der Ordnung durch Erraten einer Lösung und Polynomdivision. Auch hier ein

Bsp. 3: $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Man rät, daß $x = 1$ eine Lösung ist und dividiert das Polynom durch $x - 1$:

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 + x - 1 : x - 1 = x^2 + 1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \\ \qquad\quad x - 1 \end{array}$$

Da $x^2 + 1 > 0$ ist, gibt es keine weiteren Lösungen.