2.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Def.: Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, falls ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert, so daß

$$Ax = \lambda x.$$

Ein solcher Vektor heißt ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Bem.: $x = 0$ ist durch diese Definition als Eigenvektor ausgeschlossen!

Geometrische Interpretation: Es sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch A dargestellte lineare Abbildung, also $F(x) = Ax$. Für einen Eigenvektor v von A gilt dann

$$F(v) = \lambda v,$$

d.h. v gibt eine Richtung an, in der F ausschließlich eine Streckung darstellt.

Bsp. 1: $A = \lambda E$. hat nur den Eigenwert λ. Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist ein Eigenwert von A zu diesem Eigenwert. Insbesondere sind Eigen~~werte~~ ~~vektoren~~ toren zu gegebenem Eigenwert nicht eindeutig bestimmt. (Nicht einmal bis auf Vielfachheit.)

Bsp. 2: $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Hier sind die Diagonalelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A, denn für die kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$, das sind

$$e_k = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \, k\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)^T$$

gilt $Ae_k = \lambda_k e_k$. e_k ist also ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_k. Stimmen zwei Diagonalelemente überein, gilt z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$, so ist auch jede Linearkombination

$$x = \alpha e_1 + \beta e_2$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 \, (= \lambda_2)$.

Bem./Def.: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$E_\lambda := \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = \lambda x \} = \{ x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda E)x = 0 \} = \mathrm{Ker}(A - \lambda E)$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Falls λ ein Eigenwert von A ist, heißt E_λ der <u>Eigenraum von A zum Eigenwert λ</u>.

Wie lassen sich Eigenwerte im allgemeinen berechnen? Eine einfache Überlegung zeigt, dass wir dazu die Determinante verwenden können:

Wir haben die folgenden äquivalenten Aussagen:

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\underset{\text{p. def.}}{\Longleftrightarrow}$ Es gibt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Ax = \lambda x$

$\Longleftrightarrow$ Das Gleichungssystem $(A - \lambda E)x = 0$ besitzt eine nichttriviale Lösung

$\Longleftrightarrow$ $\det(A - \lambda E) = 0$.

Def.: Das <u>charakteristische Polynom</u> einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist dasjenige Polynom P_A vom Grad n, das durch $P_A(t) := \det(A - \lambda E)$ definiert wird.

Folgerung: Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_A.
Die Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ sind die nichttrivialen Lösungen des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)x = 0$.

Bem.: Eine $n \times n$-Matrix besitzt also höchstens n Eigenwerte (tatsächlich können es weniger sein).

Bsp. 3 :

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Hierfür haben wir

$$P_A(t) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1).$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$: Lösungen von

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y$$

Der Eigenraum von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist also

$$E_1 = \{ (t,t)^T : t \in \mathbb{R} \}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -1$: Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = -y$$

Also $E_{-1} = \{ (t,-t) : t \in \mathbb{R} \}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $P_A(t) = \det(A - tE) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ 0 & -t \end{pmatrix} =$

Also ist nur $\lambda = 0$ ein Eigenwert. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0$$

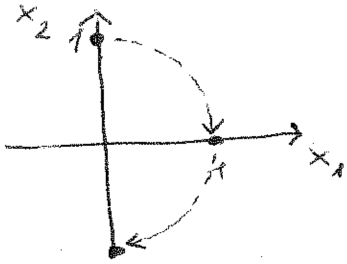
Es folgt $E_0 = \{ (t,0)^T : t \in \mathbb{R} \}$.

In Teil (b) des Bsp. haben wir bis auf skalare Vielfache nur einen Eigenvektor gefunden, obwohl die Raumdimension $n=2$ ist. Es ist auch möglich, dass gar keine Eigenvektoren existieren:

(c) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\det(A-tE)=\det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = t^2+1>0$.

Es existieren also keine (reellen) Eigenwerte und damit keine Eigenvektoren. Welche lineare Abbildung ist durch A dargestellt? Wir haben

$$A\cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -e_2$$



$$A\, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

Es handelt sich also um eine Drehung um $90°$ $(=\frac{\pi}{2})$ im Uhrzeigersinn. Insofern ist es nicht verwunderlich, dass es keinen Eigenvektor gibt.

Bsp. 4: Die Eigenwerte einer rechten oberen Dreiecksmatrix

$$R=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

sind (wie bei Diagonalmatrizen) gerade die Diagonalelemente, denn es ist

$$P_R(t)=\det\begin{pmatrix} \lambda_1-t & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n-t \end{pmatrix} = \prod_{\nu=1}^{n}(\lambda_\nu-t).$$

Das char. Pol. zerfällt hier vollständig in Linearfaktoren.