Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

WS 2020/21
25.03.2021

2. Klausur zu Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Bitte die nächsten beiden Zeilen unbedingt ausfüllen!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (außer Stift und Papier) lediglich ein beidseitig handbeschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Einfache Rechenaufgaben)	8 Punkte
A3 (Einfache Gleichungen und Ungleichungen)	10 Punkte
A4 (Skalarprodukte im $\mathbb{R}^3$)	6 Punkte
A5 (Matrixprodukte und Determinanten)	6 Punkte
A6 (Eigenwerte und -räume)	11 Punkte
A7 (Ein lineares Gleichungssystem)	10 Punkte

In Aufgabe 1 sollen Sie entscheiden, ob die vorgelegten mathematischen Aussagen richtig oder falsch sind. Kreuzen Sie dies bitte in den dafür vorgesehenen Kreisen auf Seite 3 an. Bei den Aufgaben 2 bis 6 werden lediglich die Ergebnisse korrigiert. Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, **Rechen- und Übertragungsfehler** zu **vermeiden**. **Tragen Sie Ihre Ergebnisse zu diesen Aufgaben bitte auf S. 2 ein. Diese Einträge sind maßgeblich für die Korrektur!** Bei Aufgabe 7 wird auch der Rechenweg bewertet. Die Klausur gilt mit 24 (von 61 erreichbaren) Punkten als bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2-6	7	$\sum$	Note
Punkte/Note					

Lös. Aufg. 2 (a) ____________ **(b)** ____________ /2+2P.

(c) ____________ **(d)** ____________ /2+2P.

Lös. Aufg. 3 (a) $\mathbb{L} =$ ____________ **(b)** $\mathbb{L} =$ ____________ /2+3P.

(c) $\mathbb{L} =$ ____________ **(d)** $\mathbb{L} =$ ____________ /2+3P.

Lös. Aufg. 4 (a) $|x|^2 =$ ____________ $|y|^2 =$ ____________ / 2P.

(b) $\langle x, z \rangle =$ ____________ $\langle y, z \rangle =$ ____________ / 2P.

(c) $\langle x + y, x - y \rangle =$ ____________ $\langle z, x + y \rangle =$ ____________ / 2P.

Lös. Aufg. 5 $AB =$ ____________ / 2P.

$BA =$ ____________ / 2P.

$\det(A) =$ ____________ $\det(AB) =$ ____________ /1+1P.

Lös. Aufg. 6 (a) $P_A(\lambda) =$ ____________ / 2P.

(b) $\lambda_1 =$ ______ $\lambda_2 =$ ______ $\lambda_3 =$ ______ / 3P.

(c) $E_{\lambda_1} = \{$ ____________ $\}$ / 2P.

$E_{\lambda_2} = \{$ ____________ $\}$ / 2P.

$E_{\lambda_3} = \{$ ____________ $\}$ / 2P.

$\sum =$

1. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, und welche im allgemeinen falsch sind. (Hier sind nur die Antworten “richtig”, ”falsch“ oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

   (a) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $\exp ab = \exp a \exp b$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (b) Genau dann ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (c) Jede stochastische Matrix besitzt einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (d) Die Vereinigung zweier Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

   (e) Für alle $a, b, c > 0$ gilt $\log_a(c) \log_b(a) = \log_b(c)$.

   Antwort: richtig ◯ falsch ◯ Enthaltung ◯ **(2/1/0 P.)**

2. **(2+2+2+2 P.)** Berechnen Sie:

(a) Das geometrische Mittel der Zahlen $4, 1, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$,

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{4^k}$,

(c) $\sum_{k=11}^{20} (4k+1)$,

(d) $\sum_{k=1}^{8} (-1)^k \binom{8}{k}$.

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

3. **(2+3+2+3 P.)** Finden Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

(a) $e^{2x^2} = e^{8(x-1)}$,

(b) $x^3 = 8x^2 - 15x$,

(c) $\sqrt{2x} \leq 4x^2$,

(d) $x^2 \leq |2x - 3|$.

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

4. **(2+2+2 P.)** Für die Vektoren $x = (0, 3, 2)^\top$, $y = (1, -2, 1)^\top$ und $z = (-3, 2, 7)^\top$ berechne man

(a) $|x|^2$ und $|y|^2$,

(b) $\langle x, z\rangle$ und $\langle y, z\rangle$,

(c) $\langle x + y, x - y\rangle$ und $\langle z, x + y\rangle$.

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

5. **(6 P.)** Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, BA und die Determinanten $\det(A)$ sowie $\det(AB)$ für die nachstehenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vergessen Sie nicht, Ihre Ergebnisse auf S. 2 einzutragen!

6. **(2+3+6 P.)** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ von A,

(b) alle Eigenwerte dieser Matrix sowie

(c) die zugehörigen Eigenräume.

7. **(1+6+3 P.)** Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 7 \\ 2x + y + 2z &= 5 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ dieses Systems an.

(b) Bringen Sie $(A|b)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Geben Sie dabei (in Kurzschreibweise) die von Ihnen verwendeten Zeilenoperationen an.

(c) Bestimmen Sie die Menge aller Lösungen des obigen linearen Gleichungssystems.