Mathematisches Institut
der Heinrich–Heine–Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner
Dipl. Math. C. Axler

WS 2011/2012
21.03.2012

Nachklausur zu "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I"
Gruppe A

1. (10 P.) Es seien
$$x_1 = \sum_{j=2}^{11} 3^j, \qquad x_2 = \sum_{i=0}^{10}(2i+1), \qquad x_3 = 1,\overline{02}.$$
   (a) Berechnen Sie x_1 und x_2.
   (b) Stellen Sie x_3 als gewöhnlichen Bruch dar.

2. (10 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:
   (a) $\dfrac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x-1} = 6.$
   (b) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0.$
   (c) $\sqrt{x+2} = x + 2.$

3. (10 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen:
   (a) $x^2 - 6x > 7.$
   (b) $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2} < 1.$
   (c) $x > |3x - 1|.$

4. (10 P.) Sei
$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ x & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ x & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$
   (a) Berechnen Sie die Determinante von A_x.
   (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A_x) \neq 0$ ist.
   (c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\det(A_x) \neq 0$. Bestimmen Sie die Determinante $\det(3A_{x^3}^T A_x^{-1})$.

5. (10 P.) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix
$$\text{(a)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{(b)} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (10 P.) Es seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Bringen Sie die Matrix A und die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstufenform.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$.

   (c) Bestimmen Sie eine Lösung des inhomogenen LGS

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7. (10 P.) Seien $v_1 = (0,0,1,1,1)^T$, $v_2 = (1,1,0,0,0)^T$, $v_3 = (0,-1,1,-1,1)^T$, $v_4 = (1,0,2,0,2)^T$ Vektoren im $\mathbb{R}^5$.

   (a) Berechnen Sie $||v_1||, ||v_3||$ und $||v_1 + 2v_3||$.

   (b) Bestimmen Sie reelle Zahlen $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$, nicht alle $r_i = 0$, mit $\sum_{i=1}^4 r_i v_i = 0$.

   (c) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, so dass v_1 orthogonal zu $(1, x, x, -1, 1)^T$ ist.

8. (10 P.) Ein Betrag von 100 000 € wird für 3 Jahre angelegt. Die Zinsen betragen im ersten Jahr 1% p.a., im zweiten Jahr 1% p.a. und im dritten Jahr 3% p.a.

   (a) Wie hoch ist der Kapitalertrag nach 3 Jahren, wenn die Zinsen jährlich ausgezahlt werden (d.h. mit einfacher Verzinsung)?

   (b) Wie hoch ist der Zinsertrag nach 3 Jahren, wenn die Zinsen stehen bleiben (d.h. mit Zinseszins)?

   (c) Mit welchem für die 3 Jahre festen Zinssatz p_* hätte man die gleiche Rendite wie im Fall (b) erreicht?

9. (10 P.) Der Anfangswert eines Wirtschaftsgutes betrage 1 000 000 €, die Nutzungsdauer (nach AfA-Liste) 20 Jahre.

   (a) Berechnen Sie die Abschreibungsrate a_1 und den Restwert R_8 nach 8 Jahren

      (i) bei linearer Abschreibung,

      (ii) bei degressiver Abschreibung mit 10%.

   (b) Wann wäre der optimale Übergang von degressiver zu linearer Abschreibung?

10. (10 P.) (Zinseszinsrechnung) Zu Beginn jeden Jahres wird zum Aufbau einer Rente 10 000 € auf ein Konto mit 4% p.a. verzinsten Guthaben eingezahlt.

   (a) Wie hoch ist das Kapital K_5 nach 5 Jahren?

   (b) Nach wievielen Jahren wird erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten?