# Lösungsvorschlag für Nachklausur A

**Aufgabe 1**:

(a) Mit Hilfe der geometrischen Summenformel gilt

$$x_1 = \sum_{j=2}^{11} 3^j = \sum_{j=0}^{11} 3^j - \sum_{j=0}^{1} 3^j = \frac{3^{12}-1}{2} - \frac{3^2-1}{2} = 265716.$$

Mit Hilfe der arithmetischen Summenformel gilt

$$x_1 = \sum_{i=0}^{10} (2i+1) = 2\sum_{i=0}^{10} i + \sum_{i=0}^{10} 1 = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 11 = 121.$$

(b) Es gilt $x_3 = 1 + 0.\overline{02}$. Wir setzen $y = 0.\overline{02}$. Dann gilt

$$99y = 100y - y = 2.\overline{02} - 0.\overline{02} = 2,$$

d.h. $y = \frac{2}{99}$. Daraus folgt $x_3 = 1 + y = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$.

**Aufgabe 2**:

(a) Die Gleichung ist nur für $x \neq 1$ definiert. Also gilt

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x-1} = 6 \text{ und } x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 6x - 6 \text{ und } x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 3x^2 - (x-3) = 0 \text{ und } x \neq 1.$$

Da $x^3 - 3x^2 - (x-3) = x^2(x-3) - (x-3) = (x^2-1)(x-3)$ gilt, erhalten wir, dass

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}{x-1} = 6 \text{ und } x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; (x^2 - 1 = 0 \text{ oder } x - 3 = 0) \text{ und } x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x = 3 \text{ oder } x = -1.$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{3, -1\}$.

(b) Es gilt $x^4 - 2x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2x - 2)$. Also gilt

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x^2 - 2x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x = 1 + \sqrt{3} \text{ oder } x = 1 - \sqrt{3}.$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{1 - \sqrt{3}, 0, 1 + \sqrt{3}\}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x+2} = x+2$. Quadrieren wir beide Seiten, so folgt $x+2 = x^2+4x+4$, also $x^2+3x+2 = 0$. Mit der p-q-Formel folgt $x = -1$ oder $x = -2$. Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung erhalten wir, dass $x = -1$ und $x = -2$ Lösungen der Gleichung sind.

**Aufgabe 3**:

(a) Mit der p-q-Formel erhält man, dass $x = -1$ und $x = 7$ die Lösungen von $x^2 - 6x - 7 = 0$ sind. Damit gilt $x^2 - 6x - 7 = (x-7)(x+1)$. Also gilt

$$x^2 - 6x - 7 > 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 7 > 0 \text{ und } x + 1 > 0) \text{ oder } (x - 7 < 0 \text{ und } x + 1 < 0) \Leftrightarrow x > 7 \text{ oder } x < -1.$$

Es folgt $\mathbb{L} = ]-\infty, -1[ \cup ]7, \infty[$.

(b) Wir unterscheiden im Folgenden vier Fälle.
**1.Fall**: $x + 2 > 0, x - 2 > 0$, d.h. $x > 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} < 1 \text{ und } x > 2 &\Leftrightarrow (x+2)^2 - (x-2)^2 < x^2 - 4 \text{ und } x > 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 8x - 4 > 0 \text{ und } x > 2\\ &\Leftrightarrow (x > 4 + \sqrt{20} \text{ oder } x < 4 - \sqrt{20}) \text{ und } x > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 4 + \sqrt{20}\end{aligned}$$

**2.Fall**: $x + 2 < 0, x - 2 < 0$, d.h. $x < -2$. Dann gilt (wie im ersten Fall)

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} < 1 \text{ und } x < -2 \;\Leftrightarrow\; (x > 4 + \sqrt{20} \text{ oder } x < 4 - \sqrt{20}) \text{ und } x < -2 \;\Leftrightarrow\; x < -2.$$

**3.Fall**: $x+2>0, x-2<0$, d.h. $-2<x<2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}<1 \text{ und } -2<x<2 &\Leftrightarrow (x+2)^2-(x-2)^2>x^2-4 \text{ und } -2<x<2\\ &\Leftrightarrow x^2-8x-4<0 \text{ und } -2<x<2\\ &\Leftrightarrow 4-\sqrt{20}<x<4+\sqrt{20} \text{ und } -2<x<2\\ &\Leftrightarrow 4-\sqrt{20}<x<2.\end{aligned}$$

Der Fall $x+2<0, x-2>0$ macht keinen Sinn. Somit gilt $\mathbb{L}=]-\infty,-2[\cup]4-\sqrt{20},2[\cup]4+\sqrt{20},\infty[$.

(c) Wir unterscheiden zwei Fälle.
**1.Fall**: $3x-1\geq 0$, d.h. $x\geq\frac{1}{3}$. Dann gilt

$$x>|3x-1| \text{ und } x\geq\frac{1}{3} \iff x>3x-1 \text{ und } x\geq\frac{1}{3} \iff \frac{1}{3}\leq x<\frac{1}{2}.$$

**2.Fall**: $3x-1<0$, d.h. $x<\frac{1}{3}$. Dann gilt

$$x>|3x-1| \text{ und } x<\frac{1}{3} \iff x>-(3x-1) \text{ und } x<\frac{1}{3} \iff \frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}.$$

Insgesamt erhalten wir $\mathbb{L}=]\frac{1}{4},\frac{1}{2}[$.

**Aufgabe 4**:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1\\ x & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ x & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}-\text{III}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ x & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ x & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det(A_x)=\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ x & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ x & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw. nach}\\ \text{1. Zeile}}}{=} (-1)^{1+4}\cdot\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ x & 2 & 1\end{pmatrix}=(-1)\cdot(-2x)=2x.$$

(b) Es gilt

$$\det(A_x)\neq 0 \;\Leftrightarrow\; 2x\neq 0 \;\Leftrightarrow\; x\neq 0.$$

(c) Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $\det(A_x)\neq 0$. Es gilt $\det(A_x)=2x$, also $\det(A_{x^3})=2x^3$. Daraus folgt

$$\det(3A_{x^3}^TA_x^{-1})=3^4\cdot\det(A_{x^3}^T)\cdot\frac{1}{\det(A_x)}=81\cdot\det(A_{x^3})\cdot\frac{1}{2x}=81x^2.$$

**Aufgabe 5**: Sei $a\in\mathbb{R}$ mit $a\neq 0$.

(a) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-a\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-a\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

und wir erhalten

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{\text{III}-\text{I}\\ \text{IV}-\text{II}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{III}-\text{IV}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\text{II}-\text{III}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{I}-a\cdot\text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & 1-a & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Teilen wir die erste Zeile durch $a$ und tauschen anschließend die Zeilen, so erhalten wir

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1-a}{a} & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 6**:

(a) (i) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}-\text{I}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{III}+\text{II}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right) \overset{\text{III}-\text{I}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & b_3 - b_1 \end{array}\right) \overset{\text{III}+\text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_1 + b_2 \end{array}\right).$$

(b) Wir setzen $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ in (ii) und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Wir setzen $x_5 = r, x_3 = s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $x_4 = -2x_5 = -2r$, $x_2 = -x_4 - x_5 = r$ und

$$x_1 = \frac{1}{a}(-x_2 - x_3) = -\frac{1}{a} \cdot r - \frac{1}{a} \cdot s.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}r - \frac{1}{a}s \\ r \\ s \\ -2r \\ r \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da die Vektoren $(\frac{1}{a}, 1, 0, -2, 1)^T, (\frac{1}{a}, 0, 1, 0, 0)^T$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis der Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$.

(c) Beispielsweise ist $x = (0, 0, 1, 1, 0)^T$ eine Lösung, denn

$$Ax = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ a \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 7**:

(a) Es gilt

$$||v_1|| = \sqrt{0^2+0^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

und

$$||v_3|| = \sqrt{0^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Außerdem gilt

$$||v_1+2v_3|| = ||(0,-2,3,-1,3)^T|| = \sqrt{0^2+(-2)^2+3^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{23}.$$

(b) Beispielsweise gilt

$$v_1+v_2+v_3-v_4 = 0.$$

Setzen wir also $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, r_4 = -1$, so folgt $\sum_{i=1}^4 r_i v_i = 0$.

(c) Es gilt

$$v_1 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1\cdot 0 + 0\cdot x + 1\cdot x + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

**Aufgabe 8**:

(a) Es gilt

$$K_3 = \left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{3}{100}\right)\cdot 100\,000 = 105\,000\,€$$

(b) Es gilt $K_3 = 1.01^2 \cdot 1.03 \cdot 100\,000\,€ = 105070,30\,€$ , d.h. $Z_3 = 5070,30\,€$ .

(c) Der Zinssatz $p_*$ ist gegeben durch

$$\left(1+\frac{p_*}{100}\right)^3 = 1.01^2 \cdot 1.03,$$

also

$$p_* = 100(\sqrt[3]{1.01^2\cdot 1.03} - 1) \approx 1.6623\,\%.$$

**Aufgabe 9**: Es ist $R_0 = 1\,000\,000$ € und $N = 20$.

(a) (i) (lineare Abschreibung) Die Abschreibungsrate ist gegeben durch

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{20} = \frac{R_0}{N} = 50\,000\,€ .$$

Somit erhalten wir $R_8 = R_0 - 8\cdot a_1 = 600\,000\,€$ .

(ii) (degressive Abschreibung) Die Abschreibungsrate $a_1$ ist gegeben durch

$$a_1 = \frac{10}{100}R_0 = 100\,000\,€ .$$

Außerdem ist

$$R_8 = R_0 \cdot \left(1-\frac{10}{100}\right)^8 = 430467,21\,€ .$$

(b) Hier gilt $10(20-n) \leq 100$ erstmalig für $n = 10$, d.h. der Wechsel von degressiver zu linearer Abschreibung ist im 11. Jahr optimal.

**Aufgabe 10**:

(a) Es gilt

$$K_5 = 1.04 \cdot \frac{1.04^5 - 1}{1.04 - 1} \cdot 10\,000 \approx 56329,75€$$

(b) Es gilt

$$1.04 \cdot \frac{1.04^n - 1}{0.04} \cdot 10000 \geq 200\,000 \iff 1,04^n \geq \frac{200000}{10000}\cdot\frac{0.04}{1.04} + 1 \iff n \geq \frac{\log(1.769)}{\log(1.04)} \approx 14.54$$

Also wir nach dem 15 Jahren erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten.