Mathematisches Institut
der Heinrich–Heine–Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. O. Kerner
Dipl. Math. C. Axler

WS 2011/2012
21.03.2012

Nachklausur zu "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I"
Gruppe B

1. (10 P.) Es seien
$$y_1 = \sum_{j=3}^{13} 2^j, \qquad y_2 = \sum_{i=1}^{15} (2i-1), \qquad y_3 = 1,\overline{03}.$$
   (a) Berechnen Sie y_1 und y_2.
   (b) Stellen Sie y_3 als gewöhnlichen Bruch dar.

2. (10 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Gleichungen:
   (a) $\dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1} = -4$.
   (b) $x^4+2x^3-2x^2=0$.
   (c) $\sqrt{x+1} = x+1$.

3. (10 P.) Bestimmen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen:
   (a) $x^2+6x<7$.
   (b) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1} < 1$.
   (c) $x > |2x-1|$.

4. (10 P.) Sei
$$A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$
   (a) Berechnen Sie die Determinante von A_x.
   (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A_x) \neq 0$ ist.
   (c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\det(A_x) \neq 0$. Bestimmen Sie die Determinante $\det(2A_x^{-1}A_{x^2}^T)$.

5. (10 P.) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix
$$\text{(a)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 0 \\ a & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (10 P.) Es seien $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

   (a) Bringen Sie die Matrix A und die erweiterte Matrix $(A|b)$ auf Zeilenstufenform.
   (b) Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$.
   (c) Bestimmen Sie <u>eine</u> Lösung des inhomogenen LGS

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7. (10 P.) Seien $u_1 = (1,1,1,0,0)^T$, $u_2 = (0,0,0,1,1)^T$, $u_3 = (1,-1,1,-1,0)^T$, $u_4 = (2,0,2,0,1)^T$ Vektoren im $\mathbb{R}^5$.

   (a) Berechnen Sie $||u_1||, ||u_3||$ und $||u_1 + 2u_3||$.
   (b) Bestimmen Sie reelle Zahlen $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \mathbb{R}$, nicht alle $r_i = 0$, mit $\sum_{i=1}^{4} r_i u_i = 0$.
   (c) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, so dass u_1 orthogonal zu $(1,-1,x,x,1)^T$ ist.

8. (10 P.) Ein Betrag von 10 000 € wird für 3 Jahre angelegt. Die Zinsen betragen im ersten Jahr 2% p.a., im zweiten Jahr 2% p.a. und im dritten Jahr 4% p.a.

   (a) Wie hoch ist der Kapitalertrag nach 3 Jahren, wenn die Zinsen jährlich ausgezahlt werden (d.h. mit einfacher Verzinsung)?
   (b) Wie hoch ist der Zinsertrag nach 3 Jahren, wenn die Zinsen stehen bleiben (d.h. mit Zinseszins)?
   (c) Mit welchem für die 3 Jahre festen Zinssatz p_* hätte man die gleiche Rendite wie im Fall (b) erreicht?

9. (10 P.) Der Anfangswert eines Wirtschaftsgutes betrage 100 000 €, die Nutzungsdauer (nach AfA-Liste) 20 Jahre.

   (a) Berechnen Sie die Abschreibungsrate a_1 und den Restwert R_8 nach 8 Jahren
      (i) bei linearer Abschreibung,
      (ii) bei degressiver Abschreibung mit 10%.
   (b) Wann wäre der optimale Übergang von degressiver zu linearer Abschreibung?

10. (10 P.) (Zinseszinsrechnung) Zu Beginn jeden Jahres wird zum Aufbau einer Rente 10 000 € auf ein Konto mit 5% p.a. verzinsten Guthaben eingezahlt.

   (a) Wie hoch ist das Kapital K_5 nach 5 Jahren?
   (b) Nach wievielen Jahren wird erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten?