Lösungsvorschlag für Nachklausur B

Aufgabe 1:

(a) Mit Hilfe der geometrischen Summenformel gilt

$$y_1 = \sum_{j=3}^{13} 2^j = \sum_{j=0}^{13} 2^j - \sum_{j=0}^{2} 2^j = \frac{2^{14}-1}{2-1} - \frac{2^3-1}{2-1} = 16376.$$

Mit Hilfe der arithmetischen Summenformel gilt

$$y_1 = \sum_{i=1}^{15}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{15} i - \sum_{i=1}^{15} 1 = 2 \cdot \frac{15 \cdot 16}{2} - 15 = 225.$$

(b) Es gilt $y_3 = 1 + 0.\overline{03}$. Wir setzen $b = 0.\overline{03}$. Dann gilt

$$99b = 100b - b = 3.\overline{03} - 0.\overline{03} = 3,$$

d.h. $b = \frac{3}{99}$. Daraus folgt $y_3 = 1 + b = 1 + \frac{3}{99} = \frac{102}{99} = \frac{34}{33}$.

Aufgabe 2:

(a) Die Gleichung ist nur für $x \neq -1$ definiert. Also gilt

$$\frac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1} = -4 \text{ und } x \neq -1 \;\Leftrightarrow\; x^3+3x^2-2x-4 = -4x-4 \text{ und } x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x^3+3x^2+2x = 0 \text{ und } x \neq 1.$$

Da $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2)$ gilt, erhalten wir

$$\frac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1} = -4 \text{ und } x \neq -1 \;\Leftrightarrow\; (x = 0 \text{ oder } x = -2 \text{ oder } x = -1) \text{ und } x \neq -1.$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{0, -2\}$.

(b) Es gilt $x^4 + 2x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 + 2x - 2)$. Also gilt

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x^2 + 2x - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ oder } x = -1 + \sqrt{3} \text{ oder } x = -1 - \sqrt{3}.$$

Damit gilt $\mathbb{L} = \{-1 - \sqrt{3}, 0, -1 + \sqrt{3}\}$.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{x+1} = x + 1$. Quadrieren wir beide Seiten, so folgt $x + 1 = x^2 + 2x + 1$, also $x^2 + x = 0$. Mit der p-q-Formel folgt $x = 0$ oder $x = -1$. Durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung erhalten wir, dass $x = 0$ und $x = -1$ Lösungen der Gleichung sind.

Aufgabe 3:

(a) Mit der p-q-Formel erhält man, dass $x = -7$ und $x = 1$ die Lösungen von $x^2 + 6x - 7 = 0$ sind. Damit gilt $x^2 + 6x - 7 = (x + 7)(x - 1)$. Also gilt

$$x^2 + 6x - 7 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 7 > 0 \text{ und } x - 1 < 0) \text{ oder } (x + 7 < 0 \text{ und } x - 1 > 0) \;\Leftrightarrow\; -7 < x < 1.$$

Es folgt $\mathbb{L} = \,]-7, 1[$.

(b) Wir unterscheiden im Folgenden vier Fälle.
1.Fall: $x + 1 > 0, x - 1 > 0$, d.h. $x > 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} < 1 \text{ und } x > 1 &\Leftrightarrow (x+1)^2 - (x-1)^2 < x^2 - 1 \text{ und } x > 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x - 1 > 0 \text{ und } x > 1\\ &\Leftrightarrow (x > 2 + \sqrt{5} \text{ oder } x < 2 - \sqrt{5}) \text{ und } x > 1 \;\Leftrightarrow\; x > 2 + \sqrt{5}.\end{aligned}$$

2.Fall: $x + 1 < 0, x - 1 < 0$, d.h. $x < -1$. Dann gilt (wie im ersten Fall)

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} < 1 \text{ und } x < -1 \;\Leftrightarrow\; (x > 2 + \sqrt{5} \text{ oder } x < 2 - \sqrt{5}) \text{ und } x < -1 \;\Leftrightarrow\; x < -1.$$

3.Fall: $x+1>0, x-1<0$, d.h. $-1<x<1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}<1 \text{ und } -1<x<1 &\Leftrightarrow (x+1)^2-(x-1)^2>x^2-1 \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow x^2-4x-1<0 \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow 2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5} \text{ und } -1<x<1\\ &\Leftrightarrow 2-\sqrt{5}<x<1.\end{aligned}$$

Der Fall $x+1<0, x-1>0$ macht keinen Sinn. Somit gilt $\mathbb{L}=]-\infty,-1[\cup]2-\sqrt{5},1[\cup]2+\sqrt{5},\infty[$.

(c) Wir unterscheiden zwei Fälle.
1.Fall: $2x-1\geq 0$, d.h. $x\geq\frac{1}{2}$. Dann gilt

$$x>|2x-1| \text{ und } x\geq\frac{1}{2} \iff x>2x-1 \text{ und } x\geq\frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}\leq x<1.$$

2.Fall: $2x-1<0$, d.h. $x<\frac{1}{2}$. Dann gilt

$$x>|2x-1| \text{ und } x<\frac{1}{2} \iff x>-(2x-1) \text{ und } x<\frac{1}{2} \iff \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}.$$

Insgesamt erhalten wir $\mathbb{L}=]\frac{1}{3},1[$.

Aufgabe 4:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ x & 1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{II}} \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ x & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\det(A_x)=\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ x & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \overset{\substack{\text{Entw. nach}\\ \text{4. Zeile}}}{=} (-1)^{4+4}\cdot\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}=2x.$$

(b) Es gilt

$$\det(A_x)\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0.$$

(c) Sei $x\in\mathbb{R}$ mit $\det(A_x)\neq 0$. Es gilt $\det(A_x)=2x$, also $\det(A_{x^2}^T)=\det(A_{x^2})=2x^2$. Daraus folgt

$$\det(2A_x^{-1}A_{x^2}^T)=2^4\cdot\frac{1}{\det(A_x)}\cdot\det(A_{x^2}^T)=16x.$$

Aufgabe 5: Sei $a\in\mathbb{R}$ mit $a\neq 0$.

(a) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[\text{II}-a\cdot\text{III}]{\text{I}-a\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-a\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & a^2-a\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

und wir erhalten

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2-a\\ 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV}-\text{I}]{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}-\text{IV}]{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-a\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 1-a & 1-a & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Teilen wir die zweite Zeile durch a und tauschen anschließend die Zeilen, so erhalten wir

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{a} & \frac{1-a}{a} & 1 & -\frac{1}{a} \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

(a) (i) Es gilt

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 0 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} a & 0 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} a & 0 & 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - b_2 + b_1 \end{array}\right).$$

(b) Wir setzen $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ in (ii) und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Wir setzen $x_5 = r, x_3 = s$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt $x_4 = -2x_5 = -2r$, $x_2 = x_5 = r$ und

$$x_1 = \frac{1}{a}(-x_3 - x_5) = -\frac{1}{a} \cdot r - \frac{1}{a} \cdot s.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}r - \frac{1}{a}s \\ r \\ s \\ -2r \\ r \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{LH} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da die Vektoren $(\frac{1}{a}, 1, 0, -2, 1)^T, (\frac{1}{a}, 0, 1, 0, 0)^T$ linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis der Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$.

(c) Beispielsweise ist $x = (0, 1, 0, 0, 1)^T$ eine Lösung, denn

$$Ax = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ a \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7:

(a) Es gilt

$$||u_1|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+0^2+0^2} = \sqrt{3}$$

und

$$||u_3|| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Außerdem gilt

$$||u_1+2u_3|| = ||(3,-1,3,-2,0)^T|| = \sqrt{3^2+(-1)^2+3^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{23}.$$

(b) Beispielsweise gilt

$$u_1+u_2+u_3-u_4=0.$$

Setzen wir also $r_1=1, r_2=1, r_3=1, r_4=-1$, so folgt $\sum_{i=1}^4 r_i u_i = 0$.

(c) Es gilt

$$u_1 \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ x \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot x + 0\cdot x + 0\cdot 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$$

Aufgabe 8:

(a) Es gilt

$$K_3 = \left(1+\frac{2}{100}+\frac{2}{100}+\frac{4}{100}\right)\cdot 10\,000 = 10\,800\,€$$

(b) Es gilt $K_3 = 1.02^2 \cdot 1.04 \cdot 10\,000\,€ = 10820,16\,€$, d.h. $Z_3 = 820,16\,€$.

(c) Der Zinssatz p_* ist gegeben durch

$$\left(1+\frac{p_*}{100}\right)^3 = 1.02^2\cdot 1.04,$$

also

$$p_* = 100(\sqrt[3]{1.02^2\cdot 1.04}-1) \approx 2.6623\,\%.$$

Aufgabe 9: Es ist $R_0 = 100\,000$ € und $N = 20$.

(a) (i) (lineare Abschreibung) Die Abschreibungsrate ist gegeben durch

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{20} = \frac{R_0}{N} = 5\,000\,€ \;.$$

Somit erhalten wir $R_8 = R_0 - 8\cdot a_1 = 60\,000\,€$.

(ii) (degressive Abschreibung) Die Abschreibungsrate a_1 ist gegeben durch

$$a_1 = \frac{10}{100}R_0 = 10\,000\,€ \;.$$

Außerdem ist

$$R_8 = R_0\cdot\left(1-\frac{10}{100}\right)^8 = 43046,72\,€ \;.$$

(b) Hier gilt $10(20-n) \leq 100$ erstmalig für $n = 10$, d.h. der Wechsel von degressiver zu linearer Abschreibung ist im 11. Jahr optimal.

Aufgabe 10:

(a) Es gilt

$$K_5 = 1.05\cdot\frac{1.05^5-1}{1.05-1}\cdot 10\,000 \approx 58019,12€.$$

(b) Es gilt

$$1.05\cdot\frac{1.05^n-1}{0.05}\cdot 10000 \geq 200\,000 \iff 1,05^n \geq \frac{200000}{10000}\cdot\frac{0.05}{1.05}+1 \iff n \geq \frac{\log(1.95)}{\log(1.05)} \approx 13.71$$

Also wir nach dem 14 Jahren erstmals der Betrag von 200 000 € überschritten.