Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2005

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei V ein unitärer Vektorraum und Φ sein Skalarprodukt.

(i) Verifizieren Sie die Polarisierungsformel

$$\Phi(x,y) = \|\frac{x+y}{2}\|^2 - \|\frac{x-y}{2}\|^2 + i\|\frac{x+iy}{2}\|^2 - i\|\frac{x-iy}{2}\|^2$$

für alle Vektoren $x, y \in V$.

(ii) Kann es nichtorthogonale Vektoren $x, y \in V$ geben, für die Formel von Pythagoras $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ gilt?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß es über den Körpern $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ symmetrische 2×2-Matrizen gibt, die sich nicht diagonalisieren lassen.

Aufgabe 3. Sei V ein komplexer Vektorraum, und $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ eine Untergruppe. Ein Skalarprodukt $\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *G-invariant*, wenn $\Phi(gx, gy) = \Phi(x, y)$ für alle Gruppenelemente $g \in G$ und alle Vektoren $x, y \in V$ gilt.

(i) Sei G die Gruppe aller Skalarmultiplikationen $g = \alpha\,\mathrm{id}_V$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ vom Betrag $|\alpha| = 1$. Verifizieren Sie, daß jedes Skalarprodukt G-invariant ist.

(ii) Angenommen, $V \neq 0$ und G enthält eine Skalarmultiplikation $g = \alpha\,\mathrm{id}_V$ mit $|\alpha| \neq 1$. Zeigen Sie, daß kein Skalarprodukt G-invariant ist.

(iii) Sei nun $G \subset \mathrm{Aut}(V)$ eine endliche Untergruppe. Beweisen Sie, daß es ein G-invariantes Skalarprodukt geben muss.

Aufgabe 4. Sei V ein komplexer Vektorraum, $U = V$ der zugrundeliegende reelle Vektorraum, und

$$I : U \longrightarrow U, \quad x \longmapsto ix$$

die Skalarmultiplikation mit $i \in \mathbb{C}$, aufgefaßt als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Wir betrachten nun die Komplexifizierung $U_\mathbb{C} = U \oplus iU$ und die induzierte komplex-lineare Abbildung $I_\mathbb{C} : U_\mathbb{C} \to U_\mathbb{C}$. Seien $V', V'' \subset U_\mathbb{C}$ die Eigenräume von $I_\mathbb{C}$ zu den Eigenwerten $i, -i \in \mathbb{C}$.

(i) Prüfen Sie, daß I nicht diagonalisierbar ist.

(ii) Zeigen Sie, daß $I_\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, und $\pm i$ die einzigen Eigenwerte sind. Mit anderen Worten: die kanonische Abbildung $V' \oplus V'' \to U_\mathbb{C}$ ist bijektiv.

(iii) Beweisen Sie, daß die komplexe Konjugation $\overline{x + iy} = x - iy$ auf $U_\mathbb{C}$ diese beiden Eigenräume vertauscht, das heißt $\overline{V'} = V''$.

(iv) Folgern Sie, daß $U \cap V' = 0$ und $U \cap V'' = 0$ gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 30.5. um 11:10 Uhr in den Zettelkästen.

Wegen dem Feiertag Fronleichnam werden die Übungsgruppen diese Woche vom Donnerstag, den 26.5. auf Freitag, den 27.5. verlegt. Gruppe 1 findet von 9–11 Uhr in 25.13.U1.33 statt, Gruppe 2 und 3 von 14–16 Uhr in 25.13.U1.30.