Seminar Knotentheorie

Sommersemester 2017

Verantwortlich: Prof. Dr. M. Zibrowius, P. Arndt

Ort und Zeit: Mittwochs 14:30-16:00, 03.73

Ein Vortrag sollte 80 Minuten gehen, eine schriftliche Ausarbeitung sollte ca. 10 Tage vorher an Peter Arndt gehen, bei jedem Vortrag sollte es eine Hausaufgabe für die Zuhörer geben.

Programm:

1. **Was sind Knoten? Reidemeister-Züge** Definitionen: Stetige/glatte/polygonale Knoten, zahme/wilde Knoten, Isotopien und Umgebungsisotopien, Äquivalenz von Knoten, reguläre Projektionen, Reidemeister-Züge, Satz: Reidemeister-Züge reichen aus um äquivalente Knoten ineinander zu überführen. [R] 1, 2.2-2.3; [A] 1.1-1.3; [F] 1.1-1.2

2. **Dreifärbungszahl** Kreuzungszahl und Entknotungszahl; Verschlingungszahl, die Hopfverschlingung ist nicht trivial. Die Dreifärbungszahl: Definition, Beweis der Invarianz. Der Kleeblattknoten ist verknotet. Die Menge der Dreifärbungen als Vektorraum. [R] 3.; [A] 1.4, 1.5, 3.1, 3.3.

3. **Knotengruppen I** Definition, Wirtinger-Präsentation von Knotengruppen, Beispiele, [F] 1.3; [BZ] Chapter 3 A und B bis 3.9

4. **Knotengruppen II** Weitere Beispiele (auch von verschiedenen Knoten mit isomorphen Knotengruppen, z.B. [F] 1.3), Satz: Knotengruppe erkennt triviale Knoten [Rol] 4.B.1, evtl. periphere Untergruppen

5. **Das Jones-Polynom I** Konstruktion, Beweis der Rekurrenz-Relation. [R] 4. bis 4.4.4; [A] 6.1.

6. **Das Jones-Polynom II** Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild sind nicht äquivalent. Der Achterknoten ist verknotet. Beweis der Tait-Vermutung über alternierende Knoten. [R] 4.4.5 â 4.4.15; 4.5 bis Ende 4.; [A] 6.2.

   Zöpfe

7. **Zopfgruppen** Zöpfe. Der Satz von Alexander, dass jede Verschlingung von einem Zopf kommt. Die Zopfgruppe. Die Präsentierung der Zopfgruppe. Die Zopfgruppe und die symmetrische Gruppe. Zopf-Automorphismen. Reine Zöpfe. [BZ] 2D, 10A bis 10.2, evtl. Themen aus 10.B; [A] 5.4.

8. **Satz von Markov** Verschlingungen sind äquivalent genau dann, wenn man ihre Zöpfpräsentationen durch Markov-Bewegungen ineinander überführen kann [BZ] 10.21-10.24

9. **Die Hecke-Algebra** Darstellungstheorie und Jones-Polynom; [BZ] 16A, [F]

10. **HOMFLY-Polynom und andere Polynome** [BZ] 16B, [F]

    Seifert-Flächen

11. **Eulercharakteristik** Beispiel: Ein Knoten, der eine Fläche berandet. Triangulierungen kompakter Flächen. Eulercharakteristik: Definition, Wohldefiniertheit (Beweisskizze). Eulercharakteristik und zusammenhängende Summe. Beispiele. [A] 4.1.

12. **Klassifikation von Flächen** Klassifikation geschlossener kombinatorischer Flächen: Behauptung, Beweisskizze. Klassifikation von Flächen mit Rand über Eulercharakteristik, Anzahl der Randkomponenten und Orientierbarkeit. Geschlecht. Beispiele, einschl. nichtorientierbare Flächen mit Rand. [A] 4.2; [R] 5.7.

13. **Seifert-Flächen** Die Seifert-Fläche eines orientierten Knotendiagramms. Orientierbarkeit. Evtl. Seifert-Fläche für Kleeblatt basteln. Geschlecht eines Knotens. Beispiele. Nur der Unknoten hat Geschlecht 0. Zusammenhängende Summe und Geschlecht. [A] 4.3; [R] 6.

14. **Die Seifert-Matrix und das Alexander-Polynom** Quelle: [L] 6.1 – 6.3 sowie 3.5.

15. **Primzerlegung von Knoten** Existenz und Eindeutigkeit der Primzerlegung, evtl. weitere Analogien zur Zahlentheorie [Liv, S.55-76],[M, S.76-83],[Lic, S.15-22], [LS]

Singuläre Knoten und Vassiliev-Invarianten

16. **Vassiliev-Invarianten** Singuläre Knoten. Invarianten endlicher Ordnung. Gauß-Diagramme. Der Satz von Kontsevich (ohne Beweis). Beispiele berechnen. [M] 15; [PS] 4.

Anwendungen außerhalb der Mathematik

17. **Knoten und DNA** Nach [A] 7.1 und [M] 13.

18. **Knoten und Statistische Mechanik** Nach [A] 7.4 und [M] 12. Yang-Baxter-Gleichung.

19. **Knoten und Codierungstheorie** ... lieber doch nicht

Bibliographie

[A] C.C. Adams. Das Knotenbuch. Spektrum 1995, oder englische Version: The Knot book, AMS 2004

[BZ] G. Burde und H. Zieschang. Knots. De Gruyter, 1985 u. 2003.

[F] E.M. Feichtner. Polynominvarianten der Knotentheorie, Diplomarbeit, Berlin 1994, erhältlich unter `http://www.math.uni-bremen.de/~emf/research/publ.html`

[L] C. Livingston. Knotentheorie für Einsteiger. Vieweg 1995

[Lic] R. Lickorish. Introduction to Knot theory. Springer 1997

[LS] C. Li und C. Sia. Knots and primes. Springer 1997 `http://www.math.harvard.edu/~sia/notes/knots_and_primes.pdf`

[M] K. Murasugi. Knot Theory and its Applications. Birkhäuser 1996

[PS] V. V. Prasolov u. A. B. Sossinsky. Knots, Links, Braids and 3-Manifolds. AMS 1997

[R] J. D. Roberts. Knots Knotes `http://www.math.ucsd.edu/~justin/Papers/knotes.pdf`

[Rol] D. Rolfsen. Knots and links. Publish or Perish Inc. 1976