Jens Gönner

Vortrag: Topologische Invarianz der rationalen Pontryagin-Klassen

1 Zusammenfassung

Am Anfang werde ich kurz die Chern-Klassen eines komplexen Vektorbündels einführen, wobei ich die Euler-Klasse benötige. Falls gewünscht kann ich dann hier kurz auf die Euler-Klasse und Thom-Klasse eingehen. Daraufhin kurz die Axiome der Chern-Klassen anschreiben und dann die Pontryagin-Klassen definieren. Eine wichtige Anwendung dieser Klassen ist der Signatursatz von Hirzenbruch, also werde ich diesen anschreiben wobei ich kurz vorher die Signatur einer Mannigfaltigkeit definieren werde. Als nächstes werde ich die Theorie von Siebenmann gebrauchen und folgenden Satz anschreiben:

Satz 1.0.1. Sei M^n eine geschlossene, zusammenhängende, glatte Mannigfaltigkeit mit $n \geq 5$ und $\pi_1(M)$ frei abelsch (bzw. $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}\pi_1 M)) = 0$). Falls $W \simeq M \times \mathbb{R}$ eigentlich homotopieäquivalent, dann gilt $W \cong N \times \mathbb{R}$ diffeomorph, wobei N eine geschlossene glatte Mannigfaltigkeit ist.

Daraufhin folgendes Lemma, welches ich falls Zeit ist auch beweisen kann:

Lemma 1.0.2. Sei $W \cong M^{4k} \times \mathbb{R}$ Homeomorphismus, $\pi_1(M) = 1$, M geschlossene, glatte, orientierte Mannigfaltigkeit. Dann gilt $< \mathcal{L}_k(W), [M] >= sign(M)$

Hieraus folgt dann, dass Vektorbündel über S^{4k} welche als $\mathbb{R}^n$-Faserbündel trivial sind, verschwindene Pontryagin-Klassen haben.
Daraufhin werde ich die klassifizierender Räume BO und $BTOP$ einführen und sagen, dass aus dem vorherigen Lemma der folgende Satz folgt:

Satz 1.0.3. Sei $\phi : BO \to BTOP$ die Abbildung induziert von der Inklusion, dann ist

$$\phi_* : \pi_i(BO) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_i(BTOP) \otimes \mathbb{Q} \tag{1}$$

injektiv für alle i.
Hierfür habe ich allerdings noch keinen vollständigen Beweis. Genauso für dass Korollar:

$$\phi^* : H^i(BTOP; \mathbb{Q}) \to H^i(BO; \mathbb{Q}) \tag{2}$$

ist surjeketiv für alle i

Zum Schluss folgt dann der Satz von Novikov

Satz 1.0.4. M, N glatte Mannigfaltigkeiten und $g : M \to N$ ein Homeomorphismus. Dann gilt

$$g^* p_i(TN) = p_i(TM) \in H^{4i}(M; \mathbb{Q}) \tag{3}$$

Wie genau könnte ich auch noch kurz vortragen, falls noch Zeit ist.