Übungszettel 2

Nielsen Transformationen und Stallings Faltungen. Basen der freien Gruppen

Ein Element heißt primitiv, wenn man es bis zu einer Base ergänzen kann.

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass in der freien Gruppe $F(a, b)$
1) $a^5 b^{-1} a^8$ ein primitives Element ist,
2) $ababa$ ein primitives Element ist,
3) a^2 kein primitives Element ist,
4) $a^{-1} b^{-1} ab$ kein primitives Element ist.

Aufgabe 2. Stellen Sie die Transposition

$$(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) \to (u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$$

als ein Produkt von 6 elementaren Nielsen Transformationen dar.

Aufgabe 3. Sei U ein endliches Tupel der Elemente einer freien Gruppe F. Beweisen Sie, dass $\langle U \rangle$ eine freie Gruppe mit der Basis U_{Nirr} ist.

Aufgabe 4. Seien $u_1 = ab$, $u_2 = b^{-1} a^2 b$, $u_3 = a^3$ drei Elemente der freien Gruppe $F(a, b)$. Sei $G = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.
1) Finden Sie eine Basis der freien Gruppe G
   a) mit Hilfe der Nielsen Transformationen,
   b) mit Hilfe der Stallings Faltungen.
2) Beweisen Sie, dass $u_i \notin \langle u_j, u_k \rangle$ für alle verschiedenen i, j, k gilt.

Aufgabe 5. Falten Sie die Rose für das Tupel $U = (ab^2a, ababab, a^{-1}b^{-1}abab^2a)$.

Aufgabe 6.
a) Beweisen Sie, dass $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ eine Untergruppe von Index 2 in $F(a, b)$ ist.
b) Finden Sie noch eine Untergruppe von Index 2 in $F(a, b)$.
c) Beweisen Sie, dass genau 3 Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$ existieren.
d) Finden Sie alle 3 Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$.