Übungszettel 9

Amalgamierte Produkte und HNN-Erweiterungen

Aufgabe 1. Die Gruppe $Z_3 * Z_2$ hat die Präsentation $\langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1\rangle$. Sei $\varphi : Z_3 * Z_2 \to Z_3 \times Z_2$ ein kanonischer Epimorphismus. Beweisen Sie, dass Kerφ eine freie Gruppe mit der Basis $\{xyx^{-1}y^{-1},\ x^2yx^{-2}y^{-1}\}$ ist.

Aufgabe 2. Betrachten wir die HNN-Erweiterung $\langle a, b, t \mid t^{-1}at = b^2\rangle$. Berechnen Sie die Normalform von $abt^{-1}a^3tb^5abt^{-1}a^3b^3$.

Aufgabe 3. Betrachten wir das amalgamierte Produkt $\langle a, b, t \mid a^{12}, b^{15}, a^4 = b^5\rangle$. Berechnen Sie die Normalform von $a^{15}b^{-21}a^{32}b^{42}a^{-19}$.

Aufgabe 4. Sei $G_n = \langle a, b, c, d \mid ab = cd, a^2b^2 = c^2d^2, \ldots, a^nb^n = c^nd^n\rangle$.

1) Zeigen Sie, dass G_n ein amalgamiertes Produkt ist.

2) Zeigen Sie, dass $a^{n+1}b^{n+1} \neq c^{n+1}d^{n+1}$ in G_n ist.

3) Beweisen Sie, dass $G = \langle a, b, c, d \mid ab = cd, a^2b^2 = c^2d^2, \ldots, a^ib^i = c^id^i, \ldots\rangle$ nicht endlich präsentiert sein kann.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass es einen Epimorphismus $\varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to Z_3$ gibt.
1) Finden Sie die Erzeugenden von Kerφ.
2) Finden Sie die fundamentale Region für Kerφ in der hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}^2$.