1. Metrische Räume

1.1. Definitionen. Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, wenn für beliebige Elemente x, y und z von X die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $d(x,x) = 0$ (Identische Punkte haben Abstand 0);
(ii) $d(x,y) > 0$, wenn $x \neq y$ (Positivität);
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ (Symmetrie);
(iv) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (X,d) heißt dann ein *metrischer Raum*.

Seien (X,d), (X',d') zwei metrische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Diese Abbildung heißt *Isometrie* von (X,d) nach (X',d'), wenn f biekiv ist und die Gleichung

$$d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Falls eine solche Abbildung existiert, heißen die Räume (X,d) und (X',d') *isometrisch*. Alle Isometrien von (X,d) nach sich bilden eine Gruppe, die als $\mathrm{Isom}(X,d)$, oder kürzer $\mathrm{Isom}(X)$, bezeichnet wird.

1.2. Erste Beispiele. 1) Sei $\mathbb{R}^n$ ein üblicher reeller Vektorraum:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Ein *Euklidisches Skalarprodukt* von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Eine *Euklidische Norm* (oder Länge) von $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|x| := \sqrt{x \cdot x} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Ein *Euklidischer Abstand* zwischen $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$d_E(x,y) := |x - y| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

Das Paar $(\mathbb{R}^n, d_E)$ ist ein metrischer Raum (es wird im Punkt 2.6 bewiesen). Dieser Raum heißt *Euklidischer Raum* der Dimension n und wird als $\mathbb{E}^n$ bezeichnet.

2) Sei S^n die Sphäre des Radius 1 in $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \ |x| = 1\}.$$

Es gibt zwei verschiedene Metriken auf der S^n. Die erste Metrik ist von $\mathbb{E}^{n+1}$ induziert. Die zweite, und mehr interessante Metrik d_S, definiert man so: für $x, y \in S^n$ ist der Abstand $d_S(x,y)$ gleich dem Euklidischen Winkel zwischen x und y. Formal ist

$$d_S(x,y) = \theta, \tag{1.2}$$

wobei $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ und $\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|} = x \cdot y$ ist.

Das Paar (S^n, d_S) ist ein metrischer Raum (es wird im Punkt 3.2 bewiesen). Dieser Raum heißt *sphärischer Raum* der Dimension n und wird als $\mathbb{S}^n$ bezeichnet. Später werden wir noch einen hyperbolischen Raum definieren.

1.3. Aufgabe. Seien $x, y \in S^n$ und O ein Mittelpunkt der Sphäre S^n. Schneiden wir S^n mit der 2-dimensionalen Ebene, die x, y und O enthält. Dann erhalten wir einen Kreis. Beweisen Sie, daß $d_S(x, y)$, also θ, gleich der Euklidischen Länge des kürzesten Bogens ist, die x und y in dem Kreis verbindet.

2. Euklidischer Raum $\mathbb{E}^n$

Sei V ein reeller Vektorraum. In dem Punkt werden wir ein Skalarprodukt auf V aksiomatisch definieren. Mit Hilfe des Skalarproduktes werden wir eine Norm $||\cdot||$ und einen Abstand d definieren. Danach werden wir die berühmte Ungleichung von Cauchy–Bunjakowski–Schwarz beweisen. Aus der Ungleichung werden wir ausführen, daß (V, d) ein metrischer Raum ist. Als Folgerung erhalten wir, daß $\mathbb{E}^n$ ein metrischer Raum ist.

2.1. Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt *Bilinearform*, wenn für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\langle u+v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, w\rangle,$$

$$\langle w, u+v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle,$$

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle.$$

Diese Form heißt *symmetrisch*, wenn für alle $u, v \in V$ gilt

$$\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle.$$

Diese Form heißt *positiv definit*, wenn für alle nicht nullische $u \in V$ gilt

$$\langle u, u\rangle > 0.$$

Eine Bilinearform, die symmetrisch und positiv definit ist, heißt *Skalarprodukt*. Als ein Beispiel dafür kann man Euklidisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ annehmen (siehe Punkt 1.2). Das Skalarprodukt ermöglicht die algebraische Definition von Abständen und Winkeln. Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf dem V. Die *Norm* des Vektors $v \in V$ ist

$$||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Der *Abstand* zwischen $x, y \in V$ ist

$$d(x, y) := ||x - y||.$$

2.2. Ungleichung von Cauchy–Bunjakowski–Schwarz[1]. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für alle zwei Vektoren $x, y \in V$ gilt die Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x|| \cdot ||y||. \tag{2.3}$$

Dabei, erscheint die Gleichung nur dann, wenn x und y propotional sind.

Beweis. Wenn x und y proportional sind, bekommen wir leicht die gewünschte Gleichung. Nehmen wir an, daß x und y nicht propotional sind. Dann haben wir $x - \lambda y \neq 0$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus folgt: für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 < \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle.$$

[1] Benannt ist die Ungleichung nach Augustin Louis Cauchy, Wiktor Jakowlewitsch Bunjakowski und Herrmann Amandus Schwarz. Historisch wurde die Ungleichung erstmals 1859 von Bunjakowski in einer Arbeit über Ungleichungen zwischen Integralen veröffentlicht; Schwarz veröffentlichte seine Arbeit erst 50 Jahre später.

Der letzte Ausdruck ist ein quadratisches Polynom von λ. Da der Polynom keine reellen Wurzeln hat, ist sein Diskriminant negativ. So erhalten wir

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4||x||^2 \cdot ||y||^2 < 0.$$

Vereinfacht ergibt das nun genau die gewünschte Ungleichung. □

2.3. Folgerung. Für alle zwei Vektoren $x, y \in V$ gilt die Ungleichung

$$||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||.$$

Dabei, erscheint die Gleichung nur dann, wenn x und y proportional sind.

Beweis. Mit Hilfe der Ungleichung (1.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} ||x + y||^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\ &= ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2 \\ &\leqslant ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 \\ &= (||x|| + ||y||)^2. \end{aligned}$$

Dabei, erscheint die Gleichung nur dann, wenn x und y proportional sind. □

2.4. Dreiecksungleichung für V. Für alle drei Vektoren $x, y, z \in V$ gilt

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y).$$

Beweis. Wir haben $d(x, y) = ||x - y|| \leqslant ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y)$. □

2.5. Winkel. Seien x, y zwei nicht-nullische Vektoren aus V. Aus der Ungleichung (2.3) folgt, daß es eine reelle Zahl $\theta = \theta(x, y)$ gibt, so daß $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ und

$$\langle x, y\rangle = ||x|| \cdot ||y|| \cos\theta.$$

gilt. Diese θ heißt der *Winkel* zwischen x und y.

Jetzt betrachten wir einen Einzelnfall – den Raum $\mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt (siehe Punkt 1.2). Dann erhalten wir die nächste Folgerung.

2.6. Folgerung. Der Euklidische Raum $\mathbb{E}^n$ ist ein metrischer Raum.

3. Sphärischer Raum $\mathbb{S}^n$

In dem Punkt werden wir beweisen, daß der sphärische Abstand d_S (siehe Formel (1.2)) der Dreiecksungleichung erfüllt ist. Aus diesem folgt, daß $\mathbb{S}^n$ ein metrischer Raum ist. Erst dieffinieren wir Großkreise, sphärische Winkel und sphärische Dreiecke auf der Sphäre S^n.

Schneiden wir die Sphäre mit einer 2-dimensionalen Ebene, die den Anfangspunkt O enthält, dann bekommen wir einen Großkres. Parametrisieren wir ihn. Dafür wählen wir einen Punkt C auf dem Kreis und einen Tangentialvektor u an dem Kreis im Punkt C mit $|u| = 1$. Dann können wir der Großkreis mit der Formel

$$c(t) = (\cos t)C + (\sin t)u, \quad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

beschreiben (Siehe Zeichnung ...).

Es ist klar, daß die Euklidische Länge des Großkreises gleich 2π ist. Ein Großkresbogen wird *minimal* genannt, wenn seine Länge nicht größe ist als π.

Sei $\overset{\frown}{CA}$ ein minimaler Großkresbogen von C nach A und sei u ein Tangentialvektor an dem Bogen im Punkt C mit $|u| = 1$. Dieser Tangentialvektor heißt *normierte Anfangstangente* des Bogens $\overset{\frown}{CA}$. Dann gilt

$$A = (\cos b)\, C + (\sin b)\, u, \tag{3.1}$$

wobei b ein Euklidischer Winkel zwischen C und A ist, und so gilt

$$\cos b = C \cdot A$$

(Siehe Zeichnung ...).

Seien $\overset{\frown}{CA}$ und $\overset{\frown}{CB}$ zwei Großkresbögen mit einem gemeinsamen Anfangsunkt C. Den *sphärischen Winkel* zwischen den Bögen definiert man als den Winkel zwischen ihren normierten Anfagstangenten u und v. Es ist klar, daß der Winkel gleich der einzigen reelen Zahl $\gamma \in [0, \pi]$ ist mit der Bedingung

$$\cos \gamma = u \cdot v.$$

Ein *sphärisches Dreieck* besteht aus drei Punkten A, B, C auf S^n und drei minimalen Großkreisbögen, die diese Punkte verbinden. Diese Punkte heißen die *Eckpunkte* und die Großkreisbögen heißen die *Seiten* des Dreiecks.

3.1. Sphärischer Kosinussatz. Sei Δ ein sphärisches Dreieck mit Eckpunkten A, B, C. Seien $a = d_S(B, C)$, $b = d_S(C, A)$ und $c = d_S(A, B)$ die sphärischen Längen seiner Seiten und γ sphärischer Winkel zwischen den Seiten $\overset{\frown}{CA}$ und $\overset{\frown}{CB}$. Dann gilt

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma. \tag{3.2}$$

Beweis. Seien u und v normierte Anfagstangenten an den Bögen $\overset{\frown}{CA}$ und $\overset{\frown}{CB}$. Nach unserer Definition haben wir $\cos \gamma = u \cdot v$ und $\cos c = A \cdot B$. Dann erhalten wir mit Hilfe der Formel (3.1)

$$\begin{aligned}\cos c &= A\cdot B\\ &= \big((\cos b)C + (\sin b)u\big)\cdot\big((\cos a)C + (\sin a)v\big)\\ &= \cos a\cos b\langle C, C\rangle + \sin a\sin b\langle u, v\rangle\\ &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma.\end{aligned}$$

□

3.2. Dreieckungleichung für $\mathbb{S}^n$. Für alle drei Punkte $A, B, C \in S^n$ gilt

$$d_S(A,B) \leqslant d_S(A,C) + d_S(C,B).$$

Beweis. Setzen wir $a = d_S(B,C)$, $b = d_S(C,A)$ und $c = d_S(A,B)$ und betrachten wir ein Sphärisches Dreieck Δ mit Eckpunkten A, B, C. Sei γ der sphärische Winkel zwischen den Seiten $\overset{\frown}{CA}$ und $\overset{\frown}{CB}$. Aus der Formel (3.2) folgt

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma\\ &\geqslant \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ &= \cos(a+b).\end{aligned}$$

Beachten wir, daß $c \in [0,\pi]$ und die Funktion $\cos t$ fällt, wenn t von 0 bis π steigt. Daraus erhalten wir $c \leqslant a + b$. □

4. Hyperbolischer Raum

Ein Hyperbolischer Raum spielt eine große Rolle in Mathematik, Physik und Kosmogonie. Es gibt 4 Hauptmodelle des hyperbolischen Raumes: ein Modell im Hyperboloid, das Kleinische Modell im Ball, das Poinkareische Modell im Ball und das Poinkarische Modell im komplexen Halbraum. Jedes hat seine Vorteile und Nachteile in bestimmten Situationen, aber man kann leicht ein Modell im anderen interpretieren. Wir starten von dem Modell im Hyperboloid, dann werden wir aus diesem Modell Poinkareische Modelle im Ball und im komplexen Halbraum bilden.

4.1. Raum $E^{n,1}$. Erst definieren wir eine symmetrische Bilinearform in dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$. Seien $u = (u_1, \dots, u_{n+1})$, $v = (v_1, \dots, v_{n+1})$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann setzen wir

$$\langle u|v\rangle = \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\Big) - u_{n+1}v_{n+1}.$$

Den Vektorraum R^{n+1} mit dieser Form bezeichnet[2] man als $\mathbb{E}^{n,1}$. Es ist wichtig, daß diese Form nicht positiv definit ist. Setzen wir

$$\begin{aligned}\mathbb{K} :\ &= \{u \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, \langle u|u\rangle = 0\}\\ &= \{(u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, u_1^2 + \dots + u_n^2 = u_{n+1}^2\}.\end{aligned}$$

Geometrisch $\mathbb{K}$ ist ein Kegel (siehe Zeichnung ...). Dieser Kegel teilt $\mathbb{E}^{n,1}$ in zwei Teile:

$$\mathbb{E}^{n,1}_{+} = \{u \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, \langle u|u\rangle > 0\} \quad \text{und} \quad \mathbb{E}^{n,1}_{-} = \{u \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, \langle u|u\rangle < 0\}.$$

4.2. Definition des hyperbolischen Raumes $\mathbb{H}^n$. Die Menge

$$\mathbb{H}^n := \{u = (u_1, \dots, u_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, \langle u|u\rangle = -1,\ u_{n+1} > 0\}$$

heißt realer n-dimensionaler *hypernolischer Raum*. Mit anderen Worten $\mathbb{H}^n$ gleich dem "oberen" Teil des Hyperboloids $\{u \in \mathbb{E}^{n,1} \,|\, \langle u|u\rangle = -1\}$ ist (siehe Zeichnung ...).

4.3. Satz. Für alle $u, v \in \mathbb{H}^n$ gilt $\langle u|v\rangle \leqslant -1$, wobei die Gleichung nur im Fall $u = v$ gilt.

Beweis. Mit Hilfe der Cauchy–Bunjakowski–Schwarz Ungleichung (2.3) haben wir

$$\begin{aligned}\langle u|v\rangle\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\Big) - u_{n+1}v_{n+1}\\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\Big)^{1/2} - u_{n+1}v_{n+1} \qquad (4.1)\\ &= (u_{n+1}^2 - 1)^{1/2}(v_{n+1}^2 - 1)^{1/2} - u_{n+1}v_{n+1}\\ &\leqslant -1. \qquad (4.2)\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung beweist man so: Setzen wir $a = u_{n+1}$, $b = v_{n+1}$ und nehmen wir an, daß das gilt $(a^2-1)^{\frac{1}{2}}(b^2-1)^{\frac{1}{2}} - ab > -1$. Dann gilt $(a^2-1)(b^2-1) > (ab-1)^2$. Vereinfacht, erhalten wir $(a-b)^2 < 0$ – ein Widerspruch.

[2]Der Raum $E^{3,1}$ heißt *Minkowski-Raum*. Benannt nach Hermann Minkowski, den fuhrte ihn im Jahre 1907 zur Beschreibung der speziellen Relativitatstheorie ein.

Dabei erscheint die Gleichung im (4.2) nur dann, wenn $u_{n+1} = v_{n+1}$ ist, und die Gleichung im (4.1) erscheint nur dann, wenn $(u_1, \dots, u_n) = (v_1, \dots, v_n)$ ist. $\square$

4.4. Definition der hyperbolischen Funktionen. Die Funktionen

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad , \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

heißen *hyperbolischer Kosinus* und *hyperbolischer Sinus.*

4.5. Aufgabe. 1) Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen.

2) Beweisen Sie die Formel $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$.

3) Sei $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß es $t \in \mathbb{R}$ gibt, so daß (α, β) glech $(\cosh t, \sinh t)$ oder $(-\cosh t, -\sinh t)$ ist.

4.6. Lemma über die Überschneidung einer Ebene und $\mathbb{H}^n$.
Seien A, B zwei verschiedene Punkte auf $\mathbb{H}^n$ und sei P die 2-dimensionele Ebene, die Punkte A, B und O enthält. Setzen wir $v = B + \langle A|B\rangle A$. Dann gilt $\langle v, v\rangle > 0$. Setzen wir $u := \frac{v}{\sqrt{\langle v,v\rangle}}$. Dann gilt:

1) der Vektor u liegt in der Ebene P, außerdem gilt $\langle A|u\rangle = 0$ und $\langle u|u\rangle = 1$;

2) $P \cap \mathbb{H}^n$ ist eine Kurve mit der Parametrisierung

$$t \mapsto (\cosh t)A + (\sinh t)u, \quad t \in (-\infty, +\infty);$$

3) $B = (\cosh t)A + (\sinh t)u$, wobei $\cosh t = -\langle A|B\rangle$ und $t > 0$ ist.

Beweis. Erst beweisen wir, daß $\langle v|v\rangle > 0$ ist. Wir haben

$$\begin{aligned} \langle v|v\rangle &= \langle B|B\rangle + 2\langle A|B\rangle^2 + \langle A|B\rangle^2\langle A|A\rangle \\ &= -1 + \langle A|B\rangle^2 > 0, \end{aligned}$$

da $\langle A|B\rangle < -1$ nach dem Satz 4.3 ist.

1) Der Vektor u liegt in der Ebene P, da u eine lineare Kombination von A und B ist. Beweisen wir die Formel $\langle A|u\rangle = 0$:

$$\langle A|v\rangle = \langle A|B\rangle + \langle A|B\rangle\langle A|A\rangle = 0,$$

da $\langle A|A\rangle = -1$ nach der Definition 4.2 ist. Die Formel $\langle u|u\rangle = 1$ ist klar.

2) Aus dem Punkt 1) folgt, daß die Vektoren A und u linear unabhängig sind. Deshalb hat jeder Vektor w in der Ebene P die Form $\alpha A + \beta u$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Der Vektor w gehört dem $\mathbb{H}^n$ nur dann, wenn $\langle w|w\rangle = -1$ ist und seine letzte Koordinate positiv ist. Berechnen wir:

$$\begin{aligned} \langle w|w\rangle &= \langle \alpha A + \beta u \,|\, \alpha A + \beta u\rangle \\ &= \alpha^2\langle A|A\rangle + 2\alpha\beta\langle A|u\rangle + \beta^2\langle u|u\rangle \\ &= -\alpha^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

Wenn $\langle w, w\rangle = -1$ ist, dann ist $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Nach der Aufgabe 4.5 erhalten wir zwei zentral-symmetrische Kurven: $t \mapsto (\cosh t)A + (\sinh t)u$ und $t \mapsto (-\cosh t)A + (-\sinh t)u$. Der Punkt A liegt auf der ersten Kurve (für $t = 0$) und $-A$ liegt auf der zweiten Kurve. Deswegen: die erste Kurve liegt im "oberen" Teil des Hyperboloids $\{x \,|\, \langle x|x\rangle = -1\}$, also im $\mathbb{H}^n$, und die zweite liegt im "unteren" Teil, also im $-\mathbb{H}^n$. Das zeigt, daß die Überschneidung der Ebene P mit $\mathbb{H}^n$ die erste Kurve ist.

3) Nach 2) haben wir $B = (\cosh t)A + (\sinh t)u$ für eine reelle Zahl t. Mit Hilfe der Formel aus 1) erhalten wir $\langle A|B\rangle = -\cosh t$. Daraus folgt $(\sinh t)u = B + \langle A|B\rangle A = v$. Dann $\sinh t = \sqrt{\langle v|v\rangle} > 0$. Daraus folgt $t > 0$. □

Im Zusammenhang mit Lemma 4.6 ist die folgende Definition gerechtfertigt. Vergleichen Sie sie mit der Definition der sphärische Metrik.

4.7. Definition von Metrik in $\mathbb{H}^n$. Seien A, B zwei Pukte auf dem $\mathbb{H}^n$, der hyperbolische Abstand $d_H(A, B)$ ist die einzige reelle Zahl $t \geqslant 0$, so daß

$$\cosh t = -\langle A|B\rangle.$$

In dem Punkt 4.9 werden wir beweisen, daß der hyperbolische Abstand d_H der Dreiecksungleichung erfüllt ist. Dieser Beweis wird auf dem hyperbolischen Kosinussatz 4.8 basieren. Vorher definieren wir ein hyperbolisches Segment, einen hyperbolischen Winkel und ein hyperbolisches Dreieck.

Seien A, B zwei verschiedene Pukte auf dem $\mathbb{H}^n$. Betrachten wir den Tiel der Kurve $P \cap \mathbb{H}^n$, der diese Punkte verbindet. Dieser Teil $[A, B]$ heißt *hyperbolisches Segment* zwischen A und B. Der Vektor u aus dem Lemma 4.6 heißt *normierte Anfanstangente* an dem Segment $[A, B]$. Man kann den Segment so parametrisieren:

$$(\cosh t)A + (\sinh t)u, \tag{4.3}$$

wobei $0 \leqslant t \leqslant d_H(A, B)$ ist.

Seien $[C, A]$ und $[C, B]$ zwei hyperbolische Segmente mit dem gemeinsamen Anfangsunkt C. Seien u und v ihre normierte Anfagstangente. Nach dem Folgerung 5.2 gilt $|\langle u|v\rangle| \leqslant 1$. Den *hyperbolischen Winkel* zwischen den Segmenten definiert man als einzige reelle Zahl $\gamma \in [0, \pi]$ mit der Bedingung

$$\cos \gamma = \langle u|v\rangle.$$

Ein *hyperbolisches Dreieck* besteht aus drei Punkten A, B, C auf $\mathbb{H}^n$ und drei hyperbolische Segmenten, die diese Punkte verbinden. Diese Punkte heißen die *Eckpunkte* und die Segmente heißen die *Seiten* des Dreiecks.

4.8. Hyperbolischer Kosinussatz. Sei Δ ein hyperbolisches Dreieck mit Eckpunkten A, B, C. Seien $a = d_H(B, C)$, $b = d_H(C, A)$ und $c = d_H(A, B)$ die hyperbolischen Längen seiner Seiten und γ der hyperbolischer Winkel zwischen den Seiten $[C, A]$ und $[C, B]$. Dann gilt

$$\cosh c = \cosh a \, \cosh b - \sinh a \, \sinh b \, \cos \gamma. \tag{4.4}$$

Beweis. Seien u und v normierte Anfagstangenten an den Seiten $[C, A]$ und $[C, B]$. Nach unseren Definitionen haben wir $\cos \gamma = \langle u|v\rangle$ und $\cosh c = -\langle A|B\rangle$. Dann erhalten wir mit Hilfe der Formel (4.3)

$$
\begin{aligned}
\cosh c &= -\langle A|B\rangle \\
&= -\langle (\cosh b)C + (\sinh b)u \,|\, (\cosh a)C + (\sinh a)v\rangle \\
&= -\cosh a\,\cosh b\,\langle C|C\rangle - \sinh a\,\sinh b\,\langle u|v\rangle \\
&= \cosh a\,\cosh b - \sinh a\,\sinh b\,\cos\gamma.
\end{aligned}
$$

□

4.9. Dreiecksungleichung für $\mathbb{H}^n$. Für alle drei Punkte $A, B, C \in S^n$ gilt

$$d_H(A,B) \leqslant d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

Beweis. Setzen wir $a = d_H(B,C)$, $b = d_H(C,A)$ und $c = d_H(A,B)$ und betrachten wir ein hyperbolisches Dreieck Δ mit Eckpunkten A, B, C. Sei γ der hyperbolische Winkel zwischen den Seiten $[C,A]$ und $[C,B]$. Aus der Formel (4.4) folgt

$$
\begin{aligned}
\cosh c &= \cosh a\,\cosh b - \sinh a\,\sinh b\,\cos\gamma \\
&\leqslant \cosh a\,\cosh b + \sinh a\,\sinh b \qquad . \\
&= \cosh(a+b).
\end{aligned}
$$

Beachten wir, daß $c \in [0,\infty)$ und die Funktion $\cosh t$ steigt, wenn t von 0 bis ∞ steigt. Daraus folgt $c \leqslant a+b$. □

5. Beilage

Für jeden Vektor $a \in \mathbb{E}^{n,1}$ definieren wir einen *ortogonalen* Unterraum

$$a^{\perp} = \{u \in \mathbb{E}^{n,1} \mid \langle a|u\rangle = 0\}.$$

5.1. Lemma. Sei $a \in \mathbb{E}^{n,1}_{-}$. Dann gilt $a^{\perp} \subset \mathbb{E}^{n,1}_{+} \cup \{0\}$.

Beweis. Wir haben $\langle a|a\rangle < 0$. Sei u ein nicht-nullischer Vektor aus $\mathbb{E}^{n,1}$ mit $\langle a|u\rangle = 0$. Wir müssen beweisen, daß das gilt $\langle u|u\rangle > 0$. Nehmen wir $\langle u|u\rangle \leqslant 0$ an. Sietzen wir $a = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ und $u = (u_1, \ldots, u_{n+1})$. Es ist klar, daß $a_{n+1} \neq 0$ und $u_{n+1} \neq 0$ gilt. Zusätzlich können wir voraussetzen, daß $a_{n+1} > 0$ und $u_{n+1} > 0$ ist (sonst können wir a nach $-a$ und u nach $-u$ ersetzen). Dann haben wir, mit Hilfe der Cauchy–Bunjakowski–Schwarz Ungleichung (2.3),

$$\begin{aligned} 0 = \langle a|u\rangle &= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\Big) - a_{n+1}u_{n+1} \\ &\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\Big)^{1/2} - a_{n+1}u_{n+1} \\ &< |a_{n+1}||u_{n+1}| - a_{n+1}u_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Das ist ein Wiederspruch. □

5.2. Folgerung. Sei $a \in \mathbb{E}^{n,1}$. Dann gilt für alle zwei normierten Vektoren $u, v \in a^{\perp}$ die Ungleichung $|\langle u|v\rangle| \leqslant 1$.

Beweis. Nach dem Lemma 5.1 die Begrenzung der Bilinearform $\langle\cdot|\cdot\rangle$ auf den Vektorraum $a^{\perp}$ ist positiv definit. Dann können wir die Cauchy–Bunjakowski–Schwarz Ungleichung (2.3) anwenden. □

5. Geodete Dreiecke in $\mathbb{H}^3$ sind δ-dünn

5.1. Definition. Sei (X, d) ein metrischer Raum und ABC ein geodetes Dreieck in X. Wir werden sagen, daß das Dreieck *δ-dünn* ist, wenn jede seiner Seiten in der Vereinigung der δ-Nachbarschaften anderer zwei Seiten liegt. Der Raum X heißt *δ-dünn*, wenn jedes geodete Dreieck in X δ-dünn ist.

5.2. Satz. Der Raum $\mathbb{H}^n$ ist δ-dünn, wobei $\delta = \ln 3$ ist.

Beweis. Der Einfachheit halber werden wir nur Fall $n = 2$ betrachten. Also, sei NML ein beliebiges geodetes Dreieck in $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^{2,1} \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}$. Wir werden folgende Schritte durchführen.

Schritt 1. Legen wir NMP in ein ideales Dreieck $N_1M_1P_1$ ein (siehe Zeichnung ...).

Schritt 2. Beweisen wir, daß für jeweils zwei ideale Dreiecke eine Isometrie des Raumes $(\mathbb{H}^2, d)$ existiert, die das erste Dreieck auf das zweite sendet.

Sei Δ ein ideales Dreieck, dessen "Eckpunkte" mit Achsen l_1, l_2, l_3 gegeben sind. Sei Δ' ein anderes ideales Dreieck, dessen "Eckpunkte" mit Achsen l_1', l_2', l_3' gegeben sind. Die Achsen liegen auf dem Kegel $\mathbb{K} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{E}^{2,1} \,|\, x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$. Wir werden beweisen, daß eine Matrize A existiert mit

(1) $\langle X|Y\rangle = \langle AX|AY\rangle$,

(2) $A(l_i) = l_i'$ $(i = 1, 2, 3)$.

Daraus wird folgen, daß die Abbildung $\phi : x \mapsto Ax$ $(x \in \mathbb{H}^2)$ eine Isometrie von $\mathbb{H}^2$ ist mit $\phi(\Delta) = \Delta'$.

Also, wählen wir einen nichtnullischen Vektor e_i auf der Achse l_i und einen nichtnullischen Vektor e_i' auf der Achse l_i'. Dann existieren die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die folgendes System erfüllen:

$$\begin{cases} \langle e_1 \,|\, e_2\rangle = \lambda_1\lambda_2 \,\langle e_1' \,|\, e_2'\rangle, \\ \langle e_1 \,|\, e_3\rangle = \lambda_1\lambda_3 \,\langle e_1' \,|\, e_3'\rangle, \\ \langle e_2 \,|\, e_3\rangle = \lambda_2\lambda_3 \,\langle e_2' \,|\, e_3'\rangle. \end{cases}$$

Bemerkung: Für jeweils zwei verschiedene nichtullische Vektoren x, y auf dem Kegel $\mathbb{K}$ gilt $\langle x \,|\, y\rangle < 0$. Deshalb hat dieses System eine reelle Lösung.

Sei A eine Matrize mit $Ae_i = \lambda_i e_i'$. Dann ist die Bedingung (2) automatisch erfüllt. Beweisen wir, daß die Bedingung (1) erfüllt ist.

Sei $X = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i e_i$ und $Y = \sum\limits_{i=1}^{3} \beta_i e_i$. Da $e_i, e_i' \in \mathbb{K}$ ist, haben wir $\langle e_i \,|\, e_i\rangle = 0$ und $\langle e_i' \,|\, e_i'\rangle = 0$. Deshalb gilt

$$\langle AX \,|\, AY\rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{3} \alpha_i\beta_j \langle Ae_i \,|Ae_j\,\rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{3} \alpha_i\beta_j \langle \lambda_i e_i' \,|\lambda_j e_j'\,\rangle = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{3} \alpha_i\beta_j \langle e_i \,|\, e_j\,\rangle = \langle X \,|\, Y\rangle.$$

Schritt 3. Betrachten wir ein "einfachstes" ideales Dreieck und beweisen, daß das Dreieck δ-dünn ist.

Seien e_1, e_2, e_3 drei Vektoren auf dem Kegel mit folgenden Koordinaten:

$$e_1 = \Big(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\Big), \quad e_2 = \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\Big) \quad e_3 = \Big(0, -1, 1\Big).$$

Sei $P_{i,j}$ die Ebene, die die Vektoren e_i, e_j enthält ($i \neq j$). Dann können die Ebenen P_{12}, P_{13} und P_{23} mit folgenden Gleichungen gegeben sein:

$$\begin{array}{rr} P_{12}: & 2x_2 - x_3 = 0, \\ P_{13}: & \sqrt{3}x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ P_{23}: & -\sqrt{3}x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{array}$$

Die Seiten des idealen Dreiecks sind die Hyperbeln $E_{ij} = P_{ij} \cap \mathbb{H}^2$. Sie können mit folgenden Systemen gegeben sein:

$$E_{12}: \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1. \end{cases} \quad E_{13}: \begin{cases} \sqrt{3}x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1. \end{cases} \quad E_{23}: \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1. \end{cases}$$

Man kann beweisen, daß die Scheitel der Hyperbeln sind:

$$A = \big(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\big), \quad B = \big(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\big), \quad C = \big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\big).$$

Seien X und Y zwei Punkte auf E_{13} und E_{23}, die symmetrisch bezüglich der Ebene $x_1 = 0$ sind und so, daß $d(B, X) = d(C, Y)$ gilt (Siehe Zeichnung ...). Berechnen wir den Abstand $d(X, Y)$. Sei $X = (x_1, x_2, x_3)$, dann ist $Y = (-x_1, x_2, x_3)$. Daraus folgt

$$\cosh d(X, Y) = -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -(1 + 2x_1^2).$$

Betrachten wir einen Fall, indem X "rechter" als B und Y "linker" als C liegt. Dann haben wir $|x_1| \leqslant \frac{1}{2}$. In dem Fall ist $d(X, Y) \leqslant \frac{3}{2}$. Daraus folgt $d \leqslant \ln(\frac{3+\sqrt{5}}{2})$.

Betrachten wir einen anderen Fall. Seien B_1 und C_1 die Punkte, wo sich die Hyperbeln E_{13} und E_{23} mit der Ebene $x_2 = 0$ schneiden. Dann ist $B_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}})$, $C_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \sqrt{\frac{3}{2}})$. Nehmen wir an, daß der Punkt X "rechter" als B_1 und der Punkt Y "linker" als C_1 liegt. Dann haben wir $|x_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. In dem Fall ist $d(X, Y) \leqslant 2$. Daraus folgt $d \leqslant \ln(2 + \sqrt{3})$.

Schritt 4. Daraus leiten wir mit Hilfe Papp-Axiome ab, daß das Dreieck NMP δ-dünn für $\delta = \ln(2 + \sqrt{3})$ ist. $\square$