Proseminar zur linearen Algebra

Dozent: Prof. O. Bogopolski

Proseminarbeitrag von **Neşe Özkan**

Thema:

Normalformen von Matrizen

(Teil 1)

1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Sei

$$\theta: V \rightarrow V \qquad (1)$$

ein Endomorphismus eines Vektorraumes V (über ein Körper $\mathbb{K}$) und sei A die zu θ gehörende Matrix.

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ heisst Eigenwert von A bzw. von θ, falls es ein $v \in V$, $v \neq 0$ existiert mit

$$Av = \lambda v \quad \text{,für beliebige } \lambda \in \mathbb{K} \qquad (2)$$

2. $\mathrm{Eig}\,(A,\lambda) = \{ v \in V \mid Av = \lambda v \}$ heisst Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

3. $v \in \mathrm{Eig}\,(A,\lambda)$, $v \neq 0$, dann heisst v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Die Gleichung in (2) kann in dieser Form

$$(A- \lambda I_n)v = 0 \qquad (3)$$

umgeschrieben werden.

Satz 1.1 :

Sei A eine quadratische Matrix über ein Körper $\mathbb{K}$. Ein Element λ von $\mathbb{K}$ ist ein Eigenwert von A, wenn und nur wenn λ die Gleichung in (4) erfüllt:

$$\det (A- \lambda I_n) = 0 \quad \blacksquare \qquad (4)$$

In diesem Fall wird (4) die charakteristische Gleichung genannt und seine linke Seite, also

$$\chi_A(\lambda) = \det (A - \lambda I_n) \qquad (5)$$

wird das charakteristische Polynom von A genannt.

Also sind die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms in (5).

Deshalb ist die Anzahl der Eigenwerte $\leq$ Grad des Polynoms = dim V = Die Größe von A.

Ausführlich lässt sich die charakteristische Gleichung so ablesen:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Es nimmt also diese Form an :

$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n = 0$

Satz 1.2 :

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom und folglich dieselbe Spur und Determinante.

Beweis:

Seien A und B nxn- Matrizen und seien A und B ähnlich, dann gilt für eine invertierbare Matrix P :

$B = PAP^{-1}$ (Transformationsformel)

Nach Definition gilt:

$PAP^{-1} = P(A- \lambda I_n)P^{-1} = (PA- P\lambda I_n)P^{-1} = PAP^{-1} - (P\lambda I_n P^{-1}) = PAP^{-1} - \lambda I_n = B- \lambda I_n$

Also gilt:

$P(A- \lambda I_n)P^{-1} = B- \lambda I_n$ und daraus folgt:

$\det(B- \lambda I_n) = (\det P)\cdot(\det(A- \lambda I_n))\cdot(\det P^{-1}) = (\det P)\cdot(\det(A-\lambda I_n))\cdot(\det P)^{-1}$

$= \det(A- \lambda I_n)$

Somit ist: $\det(B- \lambda I_n) = \det(A- \lambda I_n)$ ■

Satz 1.3 (Cayley- Hamilton- Satz):

Jede Matrix erfüllt seine eigene charakteristische Gleichung, dh. wenn $\chi_A(\lambda) = \det(A- \lambda I_n)$, dann ist $\chi_A(A) = 0$.

Bemerkung:

Viele neigen dazu, beim ersten Treffen mit diesem Ergebnis, es als trivial zu betrachten:

'Setze einfach $\lambda = A$ in $\det(A- \lambda I_n)$ und man erhält $\det(A- A) = \det 0$ ' .

Natürlich ist dieses Argument nicht zulässig, weil im Auswerten der Determinante, λ als ein Skalar behandelt werden soll und nicht als eine Matrix.

Was bewiesen werden muss, ist das

$A^n + c_1 A^{n-1} + ... + c_n I_n = 0$

Also ist zu zeigen: $\chi_A(A) = 0$.

Beweis:

Wir setzen zunächst $C = A - \lambda I_n$, wobei $C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \operatorname{adj} C \Leftrightarrow C^{-1} \cdot \det C = \operatorname{adj} C$

$\Leftrightarrow I_n \cdot \det C = C \cdot \operatorname{adj} C$

Somit finden wir für C:

$$\chi_A(A) \cdot I_n = (A - \lambda I_n) \cdot \operatorname{adj}(A - \lambda I_n) \qquad (6)$$

Jetzt ist die adj $(A - \lambda I_n)$ selbst ein Matrixpolynom des Grades n-1.
Wir setzen nun für adj $(A - \lambda I_n) = \lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + ... + B_{n-1}$
und ersetzen es in (6), somit erhalten wir

$$\chi_A(\lambda) \cdot I_n = (A - \lambda I_n) \cdot (\lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + ... + B_{n-1}) \qquad (7)$$

Um jetzt die Werte von B_i zu finden, berechnen wir die rechte und die linke Seite von (7).

Rechte Seite von (7):

$$(A - \lambda I_n) \cdot (\lambda^{n-1} B_0 + \lambda^{n-2} B_1 + ... + B_{n-1})$$

$$= \lambda^{n-1}(AB_0) + \lambda^{n-2}(AB_1) + ... + \lambda(AB_{n-2}) + AB_{n-1} - \lambda^n(I_n B_0) - \lambda^{n-1}(I_n B_1) - ... - \lambda(I_n B_{n-1})$$
$$= \lambda^n(-B_0) + \lambda^{n-1}(AB_0 - B_1) + ... + \lambda(AB_{n-2} - B_{n-1}) + AB_{n-1}$$

Linke Seite von (7):

$$\chi_A(\lambda) \cdot I_n = (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + ... + c_n) \cdot I_n$$
$$= \lambda^n I_n + \lambda^{n-1} c_1 I_n + ... + \lambda c_{n-1} I_n + c_n I_n$$

Wir setzen jetzt A in die linke und in die rechte Seite ein und erhalten:

$$\chi_A(A) = A^n I_n + A^{n-1} c_1 I_n + ... + A c_{n-1} I_n + c_n I_n$$
$$= A^n(-B_0) + A^{n-1}(AB_0 - B_1) + ... + A(AB_{n-2} - B_{n-1}) + AB_{n-1}$$
$$= -A^n B_0 + A^n B_0 - A^{n-1} B_1 + A^{n-1} B_1 - A^{n-2} B_2 + ... + A^2 B_{n-2} - AB_{n-1} + AB_{n-1}$$
$$= 0$$

Also folgt daraus: $\chi_A(A) = 0$ ■

Satz 1.4:

Sei V ein $\mathbb{K}$- Vektorraum, $\theta: V \to V$ $\mathbb{K}$- linear und seien $v_1,...,v_k$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,...,\lambda_k$. Dann sind $v_1,...,v_k$ linear unabhängig.

Beweis:

Zunächst definieren wir eine Menge $M = \{\alpha_{i_1} v_{i_1} + ... + \alpha_{i_s} v_{i_s} = 0 \mid \alpha_{i_1} \neq 0,...,\alpha_{i_s} \neq 0\}$, wobei $\{i_1,...,i_s\} \subseteq \{1,...,k\}$.

Die Menge M enthält eine Gleichung, die eine minimale Länge besitzt.

Nun nehmen wir an, dass die Eigenvektoren $v_1,...,v_k$ linear abhängig sind. Dann ist unsere Menge $M \neq \emptyset$.

Sei nun

(1) $\alpha_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} v_{i_2} + ... + \alpha_{i_t} v_{i_t} = 0$ eine kürzeste Kombination in M.

θ - mal anwenden

(2) $\alpha_{i_1} \lambda_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} \lambda_{i_2} v_{i_2} + ... + \alpha_{i_t} \lambda_{i_t} v_{i_t} = 0$

$\lambda_{i_1}(1) - (2)$:

$$\lambda_{i_1}(\alpha_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} v_{i_2} + ... + \alpha_{i_t} v_{i_t}) - (\alpha_{i_1} \lambda_{i_1} v_{i_1} + \alpha_{i_2} \lambda_{i_2} v_{i_2} + ... + \alpha_{i_t} \lambda_{i_t} v_{i_t}) = 0$$

$$\alpha_{i_2}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2}) v_{i_2} + ... + \alpha_{i_t}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_t}) v_{i_t} = 0$$

Widerspruch ,

denn nach Definition sind die α_i's $\neq 0$ und die λ_i's sind verschieden voneinander, daher sind $\alpha_{i_2}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_2}) \neq 0,...,\alpha_{i_t}(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_t}) \neq 0$.

Somit wird diese Gleichung nie erfüllt und daraus folgt, dass $v_1,...,v_k$ linear unabhängig sein müssen. ■

2. Invariantenteiler

Im Folgenden sei R ein euklidischer Ring.

Satz 2.1 (Invariantenteilersatz):

Ist C ϵ IR^{mxn}, so kann man C durch R- elementare Zeilen- und Spaltenumformungen in die Form
D = (d_{ij}) ϵ R^{mxn} bringen mit

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i \text{ , falls } i = j \\ 0 \text{ , falls } i \neq j \end{cases}$$

wobei $d_i \mid d_{i+1}$ für i = 1,..., r-1. Die d_i sind bis auf Einheiten (bis auf Assoziiertheit) eindeutig bestimmt und heißen Invariantenteiler.

3. Rationale kanonische Form einer Matrix

Im Folgenden sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper.

Bemerkung 3.1:

Die charakteristische Matrix X_A einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist äquivalent zu $\operatorname{diag}(1,\dots,1,g_1,1,\dots,1,g_2,\dots,1,\dots,1,g_s)$.

Dabei sind $g_1, \dots, g_s$ die von 1 verschiedenen normierten Invariantenteiler von X_A

mit $g_i \mid g_{i+t}$ für $i = 1,\dots, s-1$.

Insbesondere ist $\det(X_A) = \chi_A = g_1 \cdot \ldots \cdot g_s$.

Korollar 3.2:

Es seien $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $g_1, \dots, g_s$ die von 1 verschiedenen normierten Invariantenteiler von X_A mit
$g_i \mid g_{i+1}$ für $i = 1,\dots, s-1$.

Weiter sei $A_{g_1,\dots,g_s} = \operatorname{diag}(A_{g_1},\dots, A_{g_s})$.

Dann ist X_A äquivalent zu

$$\operatorname{diag}(X_{A_{g_1}},\dots, X_{A_{g_s}}) = A_{g_1,\dots,g_s} - \lambda\cdot I_n = X_{A_{g_1,\dots,g_s}} .$$

Definition 3.3 (Begleitmatrix):

Ist $g = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $m \in \mathbb{N}$, so heisst die Matrix

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{m-2} \\ & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times m}$$ Begleitmatrix zu g.

Satz 3.4 (Rationale kanonische Form):
Jede Matrix A ϵ $\mathbb{K}^{nxn}$ ist ähnlich zu genau einer Matrix der Form
$A_{g_1,\dots,g_s}$ mit $g_i \mid g_{i+1}$ für i = 1,..., s-1 .

Dabei sind $g_1 ,\dots, g_S$ gerade die normierten Invariantenteiler ungleich 1 von X_A.
Ausserdem ist $\chi_A = g_1 \cdot \dots \cdot g_S$ und $\mu_A = g_S$. Die Matrix $A_{g_1,\dots,g_S}$

heisst rationale kanonische Form von A
oder auch Frobenius' sche Normalform von A.

Beispielaufgabe:
Gegeben sei eine 3x3- Matrix A über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}_3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3x3}$$

a) Bestimmen Sie die rationale kanonische Form von A.
b) Geben Sie das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom von A an.
Bestimmen Sie, sofern sie existiert, die Jordan'sche Normalform von A.

Zu a):
Wir bringen zunächst die charakteristische Matrix auf die Diagonalgestalt und erhalten somit die Invariantenteiler bzw. die Invariantenfaktoren. Also:

$$X_A = A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1+2\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1+2\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{A'_{2,3}} \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & 2\lambda+2 \\ 2 & 1 & 2\lambda+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{2,3}} \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 1 & 0 \\ 1 & 2\lambda+1 & 2\lambda+2 \\ 0 & 2\lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A'_{2,1}(\lambda+2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda & 2\lambda+1 & 2\lambda+2 \\ 2\lambda^2+1 & 2\lambda+2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A'_{3,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda & \lambda & 2\lambda+2 \\ 2\lambda^2+1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{1,2}(2\lambda)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2\lambda^2+2\lambda & 0 & 2\lambda+2 \\ 2\lambda^2+1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{3,2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A'_{3,1}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2+\lambda+2 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{A_{2,3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2+2\lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{V'_{1,2},\ V_{2,3},\ V'_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{pmatrix}$$

Somit sind die Invariantenfaktoren: 1, $\lambda+1$, $\lambda^2+2\lambda+1$.

Die Begleitmatrizen für die rationale kanonische Form entstehen mit Hilfe von den Invariantenfaktoren! Wir erhalten für die jeweiligen Invariantenfaktoren folgende Begleitmatrizen:

$$A_{\lambda+1} = (2), A_{\lambda^2+2\lambda+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also sieht die rationale kanonische Form wie folgt aus (vergessen wir nicht, dass unser Körper $\mathbb{Z}_3$ ist) :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu b):

Durch die Invariantenfaktoren erhalten wir das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = 1\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda+1)^2 = (\lambda+1)^3$ (da $\chi_A(\lambda) = g_1\cdot\ldots\cdot g_s$) . Somit wissen wir, dass unser

Eigenwert $\lambda = 2$ ist (mit dreifacher algebraischer Vielfachheit)! Und da der größte Invarianteteiler unser Minimalpolynom ist (da $\mu_A(\lambda) = g_s$), ist $\mu_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$.

Somit sieht die Jordan- Normalform wie folgt aus:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 3.5:

Vorteile der rationalen kanonischen Form:

(i) Existiert (anders als die Jordan'sche Normalform) über jedem Körper und für jede Matrix.
(ii) Ist unabhängig von dem zugrunde liegenden Körper.
(iii) Ist absolut eindeutig.
(iv) Macht das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom sichtbar.