Determinante
und
Resultante

07.01.2009

Azadeh Pasandi

Definition und Grundeigenschaften:

sei U, V, W und Vektor-Raum über Körper F und beachte eine Abbildung f ($\underline{u}$,$\underline{v}$) von kartesische Produkt:

$$f: U \times V \to W$$

Diese Abbildung ist bilinear, wenn für alle $\underline{v} \in V$ die Abbildung $\underline{u} \to f(\underline{u}, \underline{v})$ und genauso für alle $\underline{u} \in U$ die Abbildung $\underline{v} \to f(\underline{u}, \underline{v})$ linear ist.
Auf diese Weise benötigen wir:

$$f(\lambda\underline{u} + \lambda'\underline{\acute{u}}, \underline{v}) = \lambda f(\underline{u}, \underline{v}) + \lambda' f(\underline{u}', \underline{v}) \qquad \forall\, \underline{u}, \underline{u}' \in U, \quad \forall\, \underline{v}, \underline{v}' \in V \quad \forall\, \lambda, \lambda' \in$$

$$f(\underline{u}, \lambda\,\underline{v} + \lambda'\,\underline{v}') = \lambda\, f(\underline{u}, \underline{v}) + \lambda' f(\underline{u}, \underline{v}') \qquad \forall\, \underline{u}, \underline{u}' \in U, \quad \forall\, \underline{v}, \underline{v}' \in V \quad \forall\, \lambda, \lambda' \in F$$

Ganz allgemein: für die Räume $U_1, \ldots, U_n$ über F, die Abbildung $f: U_1 \times \ldots \times U_n \to W$ ist multilinear, wenn sie linear in jedem Argument sind (wenn die anderen fixiert sind), d.h. für $i = 1, \ldots, n$ und $\underline{u}_i \in U_i$ die Abbildung.

$$\underline{x} \mapsto f(\underline{u}_i, \ldots, \underline{u}_{i-1}, \underline{x}, \underline{u}_{i+1}, \ldots, \underline{u}_n) \text{ Von } U_i \to W \text{ ist linear}$$

Definition:

Sei A eine nxn-Matrix über einen kommutativen Ring R, dann wird eine d(A) Funktion von Spalten von A, mit n^2 Einträge Determinante der Ordnung n genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

D.1.) d ist eine lineare Funktion in jeden einzelnen Spalten von A.
D.2.) d (A) = 0, wenn zwei Spalten von A gleich sind.
D.3.) d (I) = 1

Zu D.1.)
Seien die Spalten von A: $a_1, \ldots, a_n$

- Für sie gilt:

$$d(\lambda\, a_1 + \lambda'\, a_1', \ldots. a_n) = \lambda\, d(a_1, \ldots, a_n) + \lambda'\, d(a_1', \ldots, a_n)$$

und es gilt ähnlich für die anderen Spalten, d.h. die Funktion d(A) ist linear in alle Spalten, Multilinearität.

Aus D.1)- D.3.) folgt die folgenden Eigenschaften für Determinante:

E.1) Wenn die Spalten von A permutiert bzw. vertauscht werden, dann wird d(A) mit dem entsprechenden Vorzeichen multipliziert (mit (-1)).

- d(A) ist eine alternierende Funktion von Spalten von A, d.h. wenn z.B. zwei Spalten von A mit einander vertauscht werden, wird d(A) mit (-1) multipliziert.)

Beweis:

Seien die Spalten von A: $a_1,\dots, a_n,$ seien weiterhin a_i, a_j zwei beliebige Spalten von A, dann gilt nach **D.1.)** und **D.2)**:

Um den Ausdrück zu vereinfachen, betrachten wir zwei beliebigen Spalten von A :

$d(a_i + a_j , a_i + a_j) = 0$

$\Leftrightarrow d(a_i , a_j) + d(a_i , a_i) + d(a_j , a_i) + d(a_j , a_j) = d(a_i , a_j) + 0 + d(a_j , a_i) + 0 = 0$

$\Leftrightarrow d(a_i , a_j) = - d(a_j , a_i)$

$\Rightarrow$ Behauptung

- d(A) ist eindeutig.

Beweis:

Um zu beweisen, dass d eindeutig bestimmt ist (durch **D.1) – D.3.)**), definieren wir zu nächst eine Funktion $\varepsilon(i_1,\dots, i_n)$, wobei $(i_1,\dots, i_n)$ über $\{1,\dots,n\}$ permutieren. Also:

$$\varepsilon(i_1,\dots, i_n) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i_1,\dots, i_n)\text{, eine gerade Permutation über } \{1,\dots,n\} \\ -1 & \text{wenn } (i_1,\dots, i_n)\text{, eine gerade Permutation über } \{1,\dots,n\} \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die j-te Spalte von der Matrix $A = (a_{ij})$ kann wie folgt geschrieben werden:

$$a_j = \sum e_i . a_{ij}$$

somit:

$$\mathbf{d(a_1 ,\dots, a_n) = d\,(}\ \sum e_{i_1} a_{i_1 1}\ \mathbf{,\dots,}\ \sum e_{i_n} a_{i_n n}\ \mathbf{)} \qquad *$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1 1},\dots, a_{i_n n}\ \ d(\ e_{i_1},\dots,e_{i_n}\ ) \text{ mit Linearität.}$$

Wenn $(i_1,\dots, i_n)$, eine Permutation über $\{1,\dots,n\}$ ist, dann gilt wegen **E.1.)**:

$$d(\ e_{i_1},\dots,e_{i_n}\ ) = \ \pm d\ (e_1 ,\ \dots\dots\dots ,\ e_n) \qquad ◘$$

+ oder - je nachdem, ob die Permutation gerade oder ungerade ist.

Aber wegen **D.3)** gilt: $d(e_1 ,\ \dots\dots\dots ,\ e_n) = 1$

Und wenn (i_1,…, i_n), keine Permutation über {1,…,n} ist, muss also eine Wiederholung sein und somit verschwindet die linke Seite von ◘ wegen **D.2.)**
Daher gelten für alle Fällen:

$$d\,(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \;=\; \varepsilon\,(i_1, \ldots, i_n)$$

Wir fügen es in * ein:

$$d\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum \varepsilon\,(i_1, \ldots, i_n)\;.(\;a_{i_1 1}, \ldots, a_{i_n n}\;) \qquad (**)$$

Diese Formel zeigt, dass die Determinante eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.
Um Existenz von Determinante zu überprüfen, muss die rechte Seite von (**) untersucht werden, ob sie die **D.1.)- D.3.)** erfüllt.

Kontrolle:

D.1): ist erfüllt, da jeder Begriff auf der rechte Seite von (**) nur einen Eintrag der ersten Spalte a_1 enthält, somit ist der gesamte Ausdruck linear in a_1 und ähnlich linear in anderen Spalten.

D.2): Sei $a_1 = a_2$ und $i_1 = i_2$, dann verschwindet die rechte Seite von (**) , wenn $i_1 > i_2$ dann gibt es einen entsprechenden Begriff mit i_1 und i_2 vertauscht, d.h. wegen Permutation haben die entgegengesetztem Parität.
Somit haben wir:

$$d\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i_1 > i_2} \varepsilon\,(i_1, \ldots, i_n)(a_{i_1 1} a_{i_2 1} - a_{i_2 1} a_{i_1 1})\, a_{i_3 3} \ldots a_{i_n n}$$

und diese verschwindet, weil $a_{i_1 1} a_{i_2 1} = a_{i_2 1} a_{i_1 1}$

Mit ähnlicher Argumentation gilt es für alle anderen zwei Spalten von A.
Also **D.2)** ist erfüllt.
D.3.): Trivial

E.2) Die Determinante ist vielfache von λ, wenn alle Elementen von j-te Spalte vielfache von λ sind.
Es folgt aus Linearität.

E.3.) Die Determinante von A bleibt unverändert, wenn mehrfache von einer Spalte auf einer anderen Spalte addiert wird.
<u>Erklärung:</u>
Wegen **D.1)** und **D.2)** gilt:
$d(a_i, a_j + \lambda a_i) = d(a_i, a_j) + \lambda\, d(a_i, a_i) = d(a_i, a_j) + \lambda \,.\, 0 = d(a_i, a_j)$

D.1)- D.3) und **E.1)- E.3.)** gelten auch analog für die Zeilen.

E.4) $d(A^T)=d(A)$

Es gilt noch:

E.5) Sei $A=(a_{ij})$ eine quadratische Matrix mit den Einträge, die unter bzw. über seiner Hauptdiagonale liegen, gleich Null sind, d.h. $a_{ij}=0$ für $i > j$. bzw. für $i < j$.
Dann gilt:

$$d(A)= a_{11} . a_{22} \dots .a_{nn}$$

Notation: det(A), I A I

Vandermonde Matrix:

$$\Delta(X, Y, Z)= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & Y & Z \\ X^2 & Y^2 & Z^2 \end{vmatrix}$$

n-te Ordnung der Det. Von Vandermondematrix:

Satz:

det(vandermondematrix)= Produkt von der Variablen-Differenzen

d.h.:

$$\Delta(x_1, \dots, x_n)=. \begin{vmatrix} 1 & 1 \dots\dots\dots\dots & 1 \\ X_1 & X_2 \dots\dots\dots\dots & X_n \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} \dots\dots\dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 1} (x_i - x_j)$$

Beweis:

Es wird mit Induktion bewiesen.

Sei

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \cdots\cdots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 \cdots\cdots & X_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_n & X_n^2 \cdots\cdots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Induktionsanfang: n=2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \end{vmatrix} = X_1 - X_2 = \prod_{2 \geqslant i > j \geqslant 1} (X_i - X_j)$$

Induktionsvorraussetzung:

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$$

Induktinsschritt: n → n+1

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 \cdots\cdots & X_1^{n-1} & X_1^n \\ 1 & X_2 & X_2^2 \cdots\cdots & X_2^{n-1} & X_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & X_n & X_n^2 \cdots\cdots & X_n^{n-1} & X_n^n \\ 1 & X_{n+1} & X_{n+1}^2 \cdots\cdots & X_{n+1}^{n-1} & X_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Zu erst multipliziere die vorletzte Spalte mit X_1 und ziehe sie von der letzten ab, dann multipliziere (n-1)-te mit X_1 und ziehe sie von der n-te Spalte ab.

Man macht so weiter bis in der ersten Zeile außer bei a_{11}= 1 überall Nullen stehen, dann ist:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & X_2 - X_1 & X_2^2 - X_2 . X_1 & \cdots & X_2^n - X_2^{n-1} X_1 \\ 1 & X_3 - X_1 & X_3^2 - X_3 X_1 & \cdots & X_3^n - X_3^{n-1} X_1 \\ \cdots & & & & \\ 1 & X_{n+1} - X_1 & X_{n+1}^2 - X_{n+1} . X_1 & \cdots X_{n+1}^{n-1} & X_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Nach Laplace gilt:

$$\det A = 1. \begin{vmatrix} X_2 - X_1 & X_2^2 - X_2 . X_1 \cdots & X_2^n - X_2^{n-1} X_1 \\ X_3 - X_1 & X_3^2 - X_3 X_1 \cdots & X_3^n - X_3^{n-1} X_1 \\ \cdots & & \\ X_{n+1} - X_1 & X_{n+1}^2 - X_{n+1} . X_1 \cdots & . X_{n+1}^n - X_{n+1}^{n-1} . X_1 \end{vmatrix}$$

Von 1.Zeile ziehe den Faktor ($X_2 - X_1$) aus
Von 2.Zeile ziehe den Faktor ($X_3 - X_1$) aus
…
Und von n-te. Zeile ziehe den Faktor ($X_{n+1} - X_1$) aus
Dann ist :

$$\det A = (X_2 - X_1).(X_3 - X_1)\ldots(X_{n+1} - X_1). \begin{vmatrix} 1 & X_2 & X_2^2 \cdots X_2^{n-1} \\ & \cdots & \\ 1 & X_n & X_n^2 \cdots X_n^{n-1} \\ 1 & X_{n+1} & X_{n+1}^2 \cdots X_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Nach I.V. gilt :

$$\det(A) = \prod_{i=2}^{n+1} (X_i - X_1) . \prod_{2 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$$

q.e.d.

Entwicklung von Determinante:

Definition:

.Definiere α_{ij} als Determinante der Matrix, die man durch wegstreichen von i-te Zeile und j-te Spalte erhäl

$A_{ij} = (-1)^{i+j} . \alpha_{ij}$ heißt Kofaktor zu a_{ij} von A.

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, dann gilt:

Satz 1: (Laplace- Regel)

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} . A_{ij}$$

Definition von Adjungte-Matrix:

$$\text{adj } A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots. & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots & A_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Die gefundene Entwicklung für det(A) kann benutzt werden, um die inverse von A (A^{-1}) auszudrücken, falls diese ex. (d.h. es muss gelten det(A)≠ 0)

Satz 2 :

Wenn det(A)≠ 0 ist, dann existiert (A^{-1}) und dies ist:

$A^{-1} = (detA)^{-1}. \text{ adj } A$

Beweis:

Man betrachte das Produkt $A.((detA)^{-1}. \text{ adj } A) = (detA)^{-1}. A \text{ adj } A$ und mit Hilfe von **Saz 1**., erhalte sofort E.

Resultante:

Resultante untersucht zwei Polynomen z.B. f und g, ob die einen gemeinsamen Wurzel haben.

Definition:

Sei $f = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_n$

$g = b_0 X^m + b_1 X^{m-1} + \dots + b_m$

dann ist:

$$\mathrm{Res}(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & & 0 & & b_0 & & 0 & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ a_2 & a_1 & a_0 & & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & & & & & \\ a_n & & & & & & & \\ & \ddots & & & b_m & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & a_n & & & & b_m \end{vmatrix}_{(n+m)x(n+m)}$$

m Spalten n Spalten

Das Polynom Res mit Koeffizienten von f und g heißt Resultante von f und g.

Die Eigenschaften von Resultante:

Theorem:

Die Resultante Res(f, g) ist von Polynomen f, g bestimmt und ist eine Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten (a_i´s, b_i´s) mit folgenden Eigenschaften:

1) Es existieren F und G Polynomen in X, von Geraden weniger als n bzw. m mit Koeffizienten, welche wieder Polynomen mit Abhängigkeit von a_i und, b_i sind, sodass :

$$R = f.G + g . F$$

Daraus folgt, wenn f ung g eine gemeinsame Nullstelle haben, dann ist:

R=0

2) Res=0 $\Leftrightarrow$ f,g keine Konstante gemeinsame Faktor haben oder $a_0=b_0=0$

3) R ist homogen von Grad m in a_i´s und m in b_i´ s .

4) Wenn f und g als linear Faktoren geschrieben werden

$f=a_0\prod_i (X-\alpha_i)$ $g=b_0 \prod_i(X-\beta_i)$

Dann gilt:

$Res(f,g)=a_0^m \prod_i g(\alpha_i)=(-1)^{mn}b_0^n \prod_i f(\beta_i)$

$= a_0^m b_0^n \prod_{i,j}(\alpha_i- \beta_j)$

Beweis:

Zu 1.) Nach Definition hat G höchstens den Grad n-1 und somit f.G höchstens den Grad m+n-1 und ähnlich hat gF höchstens den Grad m+n-1.

Multipliziere die i-te Zeile von Res(f,g) mit X^{m+n-i} für i= 1, …., m+n-1 und addiere dies auf der letzten Zeile. Dies lässt alle Zeilen unverändert, außer der letzten Zeile :

$X^{m-1}.f, X^{m-2}.f, \dots ,xf,f,x^{n-1}g, X^{n-2}.g, \dots ,xg, g$ Entwicklung nach Laplace

Wir erhalten $R = f(d_0 X^{m-1} + d_1 X^{m-2} + \dots + d_{m-1}) + g (C_0 x^{n-1} + \dots + C_{n-1})$

Wobei $d_o, \dots, d_{m-1}, C_0, \dots, C_{n-1}$ Zahlen sind, genauer heißt es, dass die Koeffizienten von F und G Kofaktoren von der letzten Zeile von R sind, also die Polynomen bestimmt.

Dann ist : R= fG + gF

Sei α eine gemeinsame Nullstelle von f und g, dann setzen wir $X_i = \alpha$ ein, dann ist:

R= R(α) = f(α) G(α)+ g(α).F(α) = 0

R = f . G + g . F

Grad f = n	d.h. Grad G < m
Grad g = m	Grad F < n

Sei γ_i eine gemeinsame Nullstelle von f und g, dann gilt:

$$R(\gamma_i) = f(X)G + (g(X) - \gamma_i)F \quad , \quad X := \alpha_i$$

$$R(\gamma_i) = f(\alpha_i)G(\alpha_i) + (g(\alpha_i) - \gamma_i)F(\alpha_i) = 0$$

Da $f(\alpha_i) = 0 \, und \, (g(\alpha_i) - \gamma_i) = 0$

q.e.d.

Zu 2.) Sei d=Res(f,g) mit positiven Grad, denn nach Definition gilt:

f=dG und g=dF weiter gilt, deg G< n und deg F< m und wenn $a_0=b_0=0$, das erhält man genauso wenn d=0 ist.

Umkehrung:

Behaupte dass Res(f,g)=1, denn fIG und g I F, es gilt weiterhin, dass deg G< n und deg F< m,

und es ist nur möglich, wenn $a_0=b_0=0$.

q.e.d.

Zu 3.) Wenn wir für f , tf einsetzen, werden die a_i's zu t a_i's, also die ersten m Spalten von Res(tf, g) mit t multipliziert, dann gilt:

$$\text{Res}(tf, g)= t^m \text{Res}(f,g).$$

Dies zeigt, dass Resultante homogen von Grad m in a_i's ist und analog ist homogen von Grad n in b_i's.

q.e.d.

Zu 4.) Zu überprüfen, benenne die Resultante von f und g-y als R(y) und setze $g(\alpha_i)=\gamma_i$.

Dann ist R(y) ein Polynom und ist gleich Res(f(x),g(x)-y) und dieses Polynom ist abhängig von y. Setze für y, $g(\alpha_i)=\gamma_i$ .ein. Da $R(\gamma_i)$ die Resultante von f(x) und g(x)- γ_i., wo die gemeinsame Nullstelle x= α_i haben, gilt $R(\gamma_i) = 0$ nach 1), also γ_i ist eine Wurzel von R(y), deshalb gilt für alle i . y- γ_i I R(y) Nun hat R(y) den Grad n (aus Definition von Resultante) in y bei leitende Koeffizient $(-1)^n.a_0^m$ .Folglich gilt: $\pi(y- \gamma_i)$ I R(y) dann $\pi(y- g(\alpha_i))$ I R(y).

Folglich wenn $\gamma_1, \gamma_2,\dots, \gamma_n$ ***verschieden*** sind, dann ist

$R(y) = a_0^m \pi(\gamma_i - y)$. Dies bleibt tatsächlich über Erweiterung von Körper

Also für y=0 gilt: $R(0)= \text{Res}(f,g)= a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i)$

Wenn $\gamma_1, \gamma_2,\dots, \gamma_n$ nicht ***verschieden*** sind,dann :

Sei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nicht unbedingt Verschieden:dann ersetze $f(X):\widetilde{f(X)}$, sodass

$\tilde{\alpha}_i$ verschieden sind und unterscheiden sich von α_i um ε (oder wenig). Dann :

$$f(X)=a_0 \ . \ (X-\alpha_1) \quad (X-\alpha_2) \ \dots. \ (X-\alpha_n) \ = \ a_0 . X^n + a_1 . X^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\widetilde{f(X)}=a_0 \quad (X-\tilde{\alpha}_1) \quad (X-\tilde{\alpha}_2) \ \dots \ (X-\tilde{\alpha}_n) \ = \ a_0 . X^n + \acute{a}_1 . X^{n-1} + \dots + \acute{a}_n$$

für $\tilde{\alpha}_i \neq \tilde{\alpha}_j$

Sei $\alpha_i = \acute{\alpha}_i + \frac{1}{n}$, d.h. $\widetilde{\alpha}_i \mapsto \alpha_i$

Dann sind durch Approximation: $a_1 \approx \acute{a}_1$, … , $a_n \approx \acute{a}_n$

$a_0{}^m \prod g(\tilde{\alpha}_i)$ = Res($\widetilde{f(X)}, g(X)$

$a_0{}^m \prod g(\tilde{\alpha}_i) \approx a_0{}^m \prod g(\alpha_i)$ = Res (f(X), g(X))

Res(f,g)= $a_0{}^m \pi\, g(\alpha_i)$ für i= 1,…, n, dann setze g= $b_0 \Pi_i(X-\beta_i)$, dann ist

Res(f,g)= $a_0{}^m \pi(b_0 \Pi_i(\alpha_i - \beta_i)) = a_0{}^m b_0{}^n \Pi_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$

$(-1)^{mn} b_0{}^n \Pi_i f(\beta_i)$ dann setze für f= $a_0\Pi_i (X-\alpha_i)$ ein dann ist

$(-1)^{mn} b_0{}^n \Pi_i f(\beta_i) = (-1)^{mn} b_0{}^n \Pi_i (a_0 \Pi_i (\beta_i - \alpha_i)) = a_0{}^m b_0{}^n \Pi_{i,j}(\alpha_i - \beta_j)$

q.e.d.

Korollar: für die Polynome f, g, h gilt:

Res (fg, h)= Res(f, h). Res (g, h)

Beweis:

Aus dem Theorem, Teil 1. Folgt aus:

Res(fg,h)= (Koeff. Von fg)$^{\text{grad h}}\pi$ h(Wurzel von fg)

Wurzel von fg ={ Wurzel von f }U{Wurzel von g}, also :

(Koeff. Von fg)$^{\text{grad h}}\pi$ h(Wurzel von fg)

= (koeff. Von f)$^{\text{Gradh}}$ π h(Wurzel von f).(koeff. Von g)$^{\text{Gradh}}$ π h(Wurzel von g)

= Res(f, h). Res (g, h)

Es zeigt, dass jeder Polynom kann geschrieben werden als Produkt von linearen Faktoren über einen passenden erweiterten Körper F.

q.e.d.

Beispiel:

Diskriminante:

Definition:

Wenn in Resultante $g = f'$ ist, heißt es Diskriminante.

Für Grad 2 gilt: $Dis(f) = a_1^2 - 4a_0 a_2$

Allgemein gilt:

$$Dis(f) = (-1)^{n(n-1)/2} \ a_0^{-1}. \ Res(f, f')$$

Mit gleichem Begründung wie Resultante ist Diskriminante auch homogen von Grad 2(n-1) in a_i's.

Bsp.

Sei $f = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ dann ist $f' = 2a_0 x + a_1$

$$Res(f, f') = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_0 & 2a_0 & 0 \\ a_1 & a_1 & 2a_0 \\ a_2 & 0 & a_1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f & f' & \end{array} \end{array} = a_0 a_1^2 - 2a_0 (a_1^2 - 2a_0 a_2) = - a_0 a_1^2 + 4a_0^2 a_2$$

$Dis(f) = (-1)^{2(2-1)/2} \ a_0^{-1} (- a_0 a_1^2 + 4a_0^2 a_2) = a_1^2 - 4a_0 a_2$ Also stimmt!!!!

$f = a_0 \prod_i (X - \alpha_i) = a_0(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots\ldots (X - \alpha_n)$

$\mathrm{Dis}(f) = (-1)^{n(n-1)/2}\ a_0^{-1}.\ \mathrm{Res}(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2}\ a_0^{-1}.\ a_0^{n-1}.\ \prod_{i,} f'(\alpha_i)$ für $i = 1, \ldots, n$

$f' = a_0.\ [(X-\alpha_2)\ldots\ldots(X-\alpha_n) + (X-\alpha_1)(X-\alpha_3)\ldots\ldots(X-\alpha_n) + \ldots. + (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\ldots\ldots(X-\alpha_{n-1})]$

Dann ist :

$f'(\alpha_i) = a_0.\ [(\alpha_i-\alpha_1)\ldots\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots\ldots(\alpha_i-\alpha_n)]$

$\mathrm{Dis}(f) = (-1)^{n(n-1)/2}\ .\ a_0^{n-2}.\ a_0^{n} \prod_{i,} f'(\alpha_i)$ für $i \neq j$

$= (-1)^{n(n-1)/2}\ .\ a_0^{n-2}.\ a_0^{n} \prod_{i,} [(\alpha_i-\alpha_1)\ldots\ldots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\ldots\ldots(\alpha_i-\alpha_n)]$ für $i \neq j$

$= (-1)^{n(n-1)/2}\ .\ a_0^{n-2}.\ a_0^{n}\ (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i,j,} [(\alpha_i-\alpha_j)^2]$ für $i>j$

Also:

$\mathrm{Dis}(f) = a_0^{2(n-1)} \prod_{i,j,} [(\alpha_i-\alpha_j)^2]$ für $i>j$

$= (\ a_0^{(n-1)} \prod_{i,j,} [(\alpha_i-\alpha_j)]\ )^2$ für $i>j$

Daraus wird ersichtlich .

Korollar:

f hat eine vielfache NST $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Dis}(f) = 0$