Heinrich Heine Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

31.07.2010

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Bearbeitungszeit: 120 min

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studienfach: ____________________

Fachsemester: ____________________

Mit meiner Unterschrift melde ich mich zur oben genannten Klausur an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin eine Prüfung abzulegen.

. . . .
(Unterschrift)

Hinweis: Wie üblich müssen Sie bei den Aufgaben 3-8 den Lösungsweg angeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Note: ____

Aufgabe 1 [14 Punkte]

Multiple-Choice Aufgaben. Jede richtige Antwort gibt zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen. Falls Sie in Aufgabe 1 **insgesamt** eine negative Anzahl an Punkten erreichen, wird diese Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

(a) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage äquivalent dazu ist, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind:

	Ja	Nein
Es gibt einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass jeder Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist.	☐	☐
Aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.	☐	☐

(b) Sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage korrekt ist:

	Ja	Nein
Sei $m = n$. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.	☐	☐
Ist φ injektiv, so folgt $n \leqslant m$.	☐	☐
Ist $n = m$, so folgt, dass $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ eine Basis von W ist.	☐	☐

(c) Ja Nein

Ist die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ein ☐ ☐

Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

(d) Ja Nein

Hat die Permutationsgruppe S_5 eine Untergruppe mit 14 Elementen? ☐ ☐

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Bei dieser Aufgabe müssen Sie keine Lösungswege angeben. Es zählt nur das Ergebnis.

(a) Stellen Sie die Permutation $\sigma = (1\,2\,7\,8) \circ (2\,9\,1\,5) \in S_9$ als Produkt von unabhängigen Zykeln dar und berechnen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$. [4 Punkte]

(b) Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}_{11}^*$, für dass die Gleichung $x^2 = 3$ in $\mathbb{Z}_{11}^*$ gilt. [2 Punkte]

(c) Seien U und V zwei vier-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^6$. Welche Dimensionen sind für $U \cap V$ möglich? [3 Punkte]

Aufgabe 3 [12 Punkte]

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass der ggT von 72 und 13 gleich 1 ist. [5 Punkte]

(b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $72x + 13y = \mathrm{ggT}(72, 13)$. [5 Punkte]

(c) Geben Sie ein Element $b \in \{1, 2, \ldots, 71\}$ an, für das $13 \cdot b = 1$ in $\mathbb{Z}_{72}^*$ gilt. [2 Punkte]

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Wir betrachten das folgende reelle Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen dieses Systems.

Aufgabe 5 [18 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M(4,4,\mathbb{R})$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3,\mathbb{R})$.

(a) Wenden Sie zunächst den ersten Laplace'schen Entwicklungssatz auf die 2-te Spalte von A an. Berechnen Sie aus dieser Darstellung die Determinante von A. [6 Punkte]

(b) Berechnen Sie den Eintrag $[A^{-1}]_{23}$ direkt (d.h. Sie dürfen hier nicht das Verfahren aus Aufgabenteil (c) benutzen). [6 Punkte]

(c) Berechnen Sie die inverse Matrix von B, indem Sie auf die Matrix $(B|E_3)$ elementare Zeilenumformungen anwenden. [6 Punkte]

Aufgabe 6 [10 Punkte]
Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] = \left\{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ definieren wir eine lineare Abbildung φ durch

$$\begin{aligned} \varphi: \ \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x] &\to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[x], \\ p(x) &\mapsto p(2x-1). \end{aligned}$$

Das heißt $\varphi\left(ax^2 + bx + c\right) = a\,(2x-1)^2 + b\,(2x-1) + c.$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_B^B$ für die Basis $B = \left\{1, x, x^2\right\}$.

Aufgabe 7 [15 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A. [4 Punkte]

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ von A den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$. [8 Punkte]

(c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist und geben sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

[3 Punkte]

Aufgabe 8 [12 Punkte]

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, für die $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Ker}(\varphi) \cap \operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}\,. \qquad [6 \text{ Punkte}]$$

(b) Zeigen Sie, dass
$$V = \operatorname{Ker}(\varphi) + \operatorname{Im}(\varphi). \qquad [6 \text{ Punkte}]$$

Hinweis: Sie können für Aufgabenteil (b) die Im-Ker-Formel und die Dimensionsformel für Summen benutzen.