

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Bearbeitungszeit: 120 min

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Studienfach: _____

Fachsemester: _____

Mit meiner Unterschrift melde ich mich zur oben genannten Klausur an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin eine Prüfung abzulegen.

.....
(Unterschrift)

Hinweis: Wie üblich müssen Sie bei den Aufgaben 3-8 den Lösungsweg angeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Note: ____

Aufgabe 1 [14 Punkte]

Multiple-Choice Aufgaben. Jede richtige Antwort gibt zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen. Falls Sie in Aufgabe 1 **insgesamt** eine negative Anzahl an Punkten erreichen, wird diese Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

- (a) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage äquivalent dazu ist, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind:

	Ja	Nein
Es gibt einen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, so dass jeder Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3 ist.	☒	☐

Aus $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.	☒	☐
--	-------------------------------------	--------------------------

- (b) Sei $\varphi : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W . Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage korrekt ist:

	Ja	Nein
Sei $m = n$. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.	☒	☐

Ist φ injektiv, so folgt $n \leq m$.	☒	☐
---	-------------------------------------	--------------------------

Ist $n = m$, so folgt, dass $\{\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)\}$ eine Basis von W ist.	☐	☒
--	--------------------------	-------------------------------------

(c) Ja Nein

Ist die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ ein ☐ ☒

Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$?

(d) Ja Nein

Hat die Permutationsgruppe S_5 eine Untergruppe mit 14 Elementen? ☐ ☒

Aufgabe 2 [9 Punkte]

Bei dieser Aufgabe müssen Sie keine Lösungswege angeben. Es zählt nur das Ergebnis.

- (a) Stellen Sie die Permutation $\sigma = (1\,2\,7\,8) \circ (2\,9\,1\,5) \in S_9$ als Produkt von unabhängigen Zykeln dar und berechnen Sie $\text{sign}(\sigma)$.
[4 Punkte]

$$(1\,5\,7\,8) \circ (2\,9)$$

- (b) Finden Sie ein $x \in \mathbb{Z}_{11}^*$, für dass die Gleichung $x^2 = 3$ in $\mathbb{Z}_{11}^*$ gilt.
[2 Punkte]

$$x = 5 \text{ (Alternativ: } x = 6)$$

- (c) Seien U und V zwei vier-dimensionale Untervektorräume von $\mathbb{R}^6$. Welche Dimensionen sind für $U \cap V$ möglich? [3 Punkte]

$$2, 3, 4$$

Aufgabe 3 [12 Punkte]

- (a) Beweisen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, dass der ggT von 72 und 13 gleich 1 ist. [5 Punkte]
- (b) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $72x + 13y = \text{ggT}(72, 13)$. [5 Punkte]
- (c) Geben Sie ein Element $b \in \{1, 2, \dots, 71\}$ an, für das $13 \cdot b = 1$ in $\mathbb{Z}_{72}^*$ gilt. [2 Punkte]

Lösung

- (a) Wir wenden den euklidischen Algorithmus auf die Zahlen 72 und 13 an:

$$72 = 5 \cdot 13 + 7 \quad (1)$$

$$13 = 1 \cdot 7 + 6 \quad (2)$$

$$7 = 1 \cdot 6 + 1 \quad (3)$$

$$6 = 6 \cdot 1 + 0 \quad (4)$$

Es gilt also $\text{ggT}(72, 13) = 1$.

- (b)

$$1 \stackrel{(3)}{=} 7 - 1 \cdot 6$$

$$\stackrel{(2)}{=} 7 - 1 \cdot (13 - 1 \cdot 7) = -1 \cdot 13 + 2 \cdot 7$$

$$\stackrel{(1)}{=} -1 \cdot 13 + 2 \cdot (72 - 5 \cdot 13) = 2 \cdot 72 - 11 \cdot 13$$

- (c) Nach (b) gilt $\text{Rest}_{72}(13 \cdot (-11)) = 1$. Wegen $-11 + 72 = 61$ gilt auch $\text{Rest}_{72}(13 \cdot 61) = 1$ und $b = 61$ ist die gesuchte Lösung.

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Wir betrachten das folgende reelle Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen dieses Systems.

Lösung

Wir addieren das (-3) -fache der 2-ten Zeile zur ersten und das (-2) -fachen der 2-ten Zeile zur dritten. Anschließend vertauschen wir die Reihenfolge:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 0 - 3x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Durch Addition des (-3) -fachen der zweiten zur dritten Zeile erhalten wir die Zeilenstufenform

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

mit den führenden Unbekannten x_1, x_2 und den Parameterunbekannten x_3, x_4 .

Für $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$ erhält man $x_2 = 3$ und $x_1 = -1$.

Für $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$ erhält man $x_2 = 1$ und $x_1 = -1$.

Ein Fundamentalsystem ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 5 [18 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M(4, 4, \mathbb{R})$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R})$.

- Wenden Sie zunächst den ersten Laplace'schen Entwicklungssatz auf die 2-te Spalte von A an. Berechnen Sie aus dieser Darstellung die Determinante von A . [6 Punkte]
- Berechnen Sie den Eintrag $[A^{-1}]_{23}$ direkt (d.h. Sie dürfen hier nicht das Verfahren aus Aufgabenteil (c) benutzen). [6 Punkte]
- Berechnen Sie die inverse Matrix von B , indem Sie auf die Matrix $(B|E_3)$ elementare Zeilenumformungen anwenden. [6 Punkte]

Lösung

$$(a) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 7 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Sarrus}}{=} -2 \cdot (-2 \cdot 9 \cdot 3 - (-2) \cdot 5 \cdot 1) - 5 \cdot (1 \cdot 9 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 1) = -22$$

$$(b) \quad [A^{-1}]_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \frac{\det(A'_{32})}{\det(A)} \stackrel{(a)}{=} \frac{1}{22} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Sarrus}}{=} -\frac{21}{22}$$

- Wir multiplizieren die letzte Zeile von $(B|E_3)$ mit (-1) und vertauschen sie mit der ersten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nun addieren wir die letzte Zeile zur ersten und multiplizieren die zweite mit $\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6 [10 Punkte]

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ definieren wir eine lineare Abbildung φ durch

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] &\rightarrow \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \\ p(x) &\mapsto p(2x - 1).\end{aligned}$$

Das heißt $\varphi(ax^2 + bx + c) = a(2x - 1)^2 + b(2x - 1) + c$.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_B^B$ für die Basis $B = \{1, x, x^2\}$.

Lösung

Wegen

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \varphi(x) &= 2x - 1 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ \varphi(x^2) &= (2x - 1)^2 = 1 \cdot 1 - 4 \cdot x + 4 \cdot x^2\end{aligned}$$

ist die Darstellungsmatrix

$$[\varphi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 [15 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3, \mathbb{R})$.

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A . [4 Punkte]
 (b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ von A den zugehörigen Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda)$. [8 Punkte]
 (c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist und geben sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

[3 Punkte]

Lösung

- (a) Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda)^2.$$

Somit sind 1 und 2 die Eigenwerte von A .

- (b) $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ liegt genau dann in $\text{Eig}(A, 1)$, wenn $(A - E_3)x = 0$.

Das zugehörige lineare Gleichungssystem in Zeilenstufenform ist

$$x_1 = 0$$

mit führendem Unbekannten x_1 und Parameterunbekannten x_2, x_3 . Ein Fundamentalsystem an Lösungen ist

$$\left\{ b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und somit ist $\text{Eig}(A, 1) = \mathcal{L}(\{b_1, b_2\})$. Für den Eigenwert 2 ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

Dieses ist bereits in Zeilenstufenform und mit $b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\text{Eig}(A, 2) = \mathcal{L}(b_3).$$

- (c) Da die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis von Eigenvektoren zu den Eigenwerten $1, 1, 2$ bilden ist A diagonalisierbar und es gilt $T^{-1}AT = D$ mit

$$T := (b_1 \ b_2 \ b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8 [12 Punkte]

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, für die $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi) = \{0\}. \quad [6 \text{ Punkte}]$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$V = \text{Ker}(\varphi) + \text{Im}(\varphi). \quad [6 \text{ Punkte}]$$

Hinweis: Sie können für Aufgabenteil (b) die Im-Ker-Formel und die Dimensionsformel für Summen benutzen.

Lösung

(a) Die Inklusion $\supset$ ist erfüllt. Um $\subset$ zu zeigen sei $v \in \text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi)$. Dann ist

$$\varphi(v) = 0 \quad (1)$$

und es gibt ein $w \in V$ mit

$$\varphi(w) = v. \quad (2)$$

Zusammen folgt $v \stackrel{(2)}{=} \varphi(w) \stackrel{\text{Vor.}}{=} \varphi \circ \varphi(w) \stackrel{(2)}{=} \varphi(v) \stackrel{(1)}{=} 0$.

(b) Da $\text{Ker}(\varphi) + \text{Im}(\varphi)$ ein Untervektorraum von V ist genügt es zu zeigen, dass die Dimensionen übereinstimmen. Nach der Im-Ker-Formel für lineare Abbildungen gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)).$$

Mit der Dimensionsformel für Summen folgt hieraus

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(\varphi) + \text{Im}(\varphi)) + \dim(\text{Ker}(\varphi) \cap \text{Im}(\varphi)).$$

Dies zeigt die Gleichheit der Dimensionen, da der letzte Summand nach Aufgabenteil (a) gleich 0 ist.