Heinrich Heine Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

29.09.2010

Nachklausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

Bearbeitungszeit: 120 min

Bitte in Druckschrift ausfüllen!

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studienfach: ____________________

Fachsemester: ____________________

Mit meiner Unterschrift melde ich mich zur oben genannten Klausur an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin eine Prüfung abzulegen.

....
(Unterschrift)

Hinweis: Wie üblich müssen Sie bei den Aufgaben 3-8 den Lösungsweg angeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Note: ____

Aufgabe 1 [14 Punkte]

Multiple-Choice Aufgaben. Jede richtige Antwort gibt zwei Punkte, für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen. Falls Sie in Aufgabe 1 **insgesamt** eine negative Anzahl an Punkten erreichen, wird diese Aufgabe mit 0 Punkten gewertet.

(a) Sei $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe und H_1, H_2 zwei Untergruppen von G. Kann man hieraus folgern, dass die angegebenen Mengen Untergruppen von G sind?

	Ja	Nein
$H_1 \cap H_2$	☐	☐
$H_1 \cup H_2$	☐	☐
$H_1 \cdot H_2$	☐	☐

(b) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage korrekt ist.

	Ja	Nein
Seien V, W zwei K-Vektorräume. Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \{0_V\}$.	☐	☐
Es gibt eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\varphi)$.	☐	☐
Für alle $n \geq 2$ gilt $\lvert\mathbb{Z}_n^*\rvert = n - 1$.	☐	☐
Der Matrizenring $M(2, 2, \mathbb{R})$ ist nullteilerfrei. **Hinweis:** Ein Ring R heißt nullteilerfrei, wenn aus $a \cdot b = 0$ mit $a, b \in R$ folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$ gilt.	☐	☐

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Bei dieser Aufgabe müssen Sie keine Lösungswege angeben. Es zählt nur das Ergebnis.

(a) Sei $\sigma \in S_8$ die Permutation mit $\sigma \circ (1\,2\,3\,4) = (2\,4\,6\,8)$. Stellen Sie σ als Produkt von unabhängigen Zykeln dar und geben Sie $\mathrm{ord}(\sigma)$ an. [4 Punkte]

(b) Geben Sie alle Untergruppen der Permutationsgruppe $(S_3, \circ)$ an. [3 Punkte]

(c) Geben Sie zwei vier-dimensionale Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^6$ an, so dass die Dimension von $U + V$ gleich 5 ist. [3 Punkte]

Aufgabe 3 [12 Punkte]

Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie eine Basis von

$$\mathcal{L}(\{v_1, v_2\}) \cap \mathcal{L}(\{v_3, v_4\}).$$

Aufgabe 4 [12 Punkte]

(a) Wir betrachten das folgende reele Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 6x_2 + 10x_3 \phantom{{}-2x_4} = 4 \\ \phantom{2x_1 - 6x_2 + {}} 3x_3 + 6x_4 = 9 \end{cases}$$

Geben Sie die Lösungsmenge dieses Systems in einer parametrisierten Form an. [7 Punkte]

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3,3,\mathbb{R}).$$

[5 Punkte]

Aufgabe 5 [15 Punkte]

Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(3,3,\mathbb{R})$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A. [4 Punkte]

(b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ von A den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$. [8 Punkte]

(c) Begründen Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist. Wenn ja, geben Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

[3 Punkte]

Aufgabe 6 [15 Punkte]

Auf dem Untervektorraum $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ der reellen 2×2-Matrizen definieren wir eine lineare Abbildung φ durch

$$\begin{aligned} \varphi : \quad V & \to \quad V, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $[\varphi]_B^B$ für die Basis

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

[9 Punkte]

(b) Wir betrachten nun zusätzlich die Basis

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie die Übergangsmatrix von B zu C an. [6 Punkte]

Aufgabe 7 [12 Punkte]

(a) Finden Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$19u + 7v = 1.$$

[4 Punkte]

(b) Wir betrachten die Gleichung aus Aufgabenteil (a) nun in dem Ring $\mathbb{Z}_{26} = \{0, 1, \ldots, 25\}$. Finden Sie zwei verschiedene Lösungen.

[4 Punkte]

(c) Wie viele verschiedene Lösungen besitzt die Gleichung in $\mathbb{Z}_{26}$.

[4 Punkte]

Aufgabe 8 [10 Punkte]

Seien V, W zwei K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiter seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ Vektoren in V, so dass $\varphi(b_1), \varphi(b_2), \ldots, \varphi(b_n)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie, dass die Vektoren $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dann ebenfalls linear unabhängig sind.

Hinweis: Begründen Sie jeden Beweisschritt.