Das Vektorprodukt und Sphärische Geometrie

Proseminar zu Algebra
von

Methnani Lassaad

Mathematisches Institut
der
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
12. April 2010

Betreuung: Prof. Dr. Bogopolski

§1) Das Vektorprodukt:

(1)Definition und Eigenschaften:

Für beliebige $a, b \in R^3$ nennt man $a \times b$ das Vektorprodukt oder äußeres Produkt und ist definiert durch:

$$a \times b = \begin{pmatrix} \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 \\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \end{pmatrix}$$

wobei a $= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ *und* b $= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

Das Vektorprodukt $a \times b$ ist orthogonal zu a und b.
Die Abbildung $(a, b) \longmapsto a \times b$ ist bilinear.
Für das Vektorprodukt gelten folgende Axiome:

1.1) Das Distributiv-Gesetz:
$(\alpha a + \beta b) \times c = \alpha(a \times c) + \beta(b \times c)$

1.2) Das Anti-kommutativ-Gesetz:
$a \times b = -b \times a$

Speziell: $a \times a = 0 \forall a \in R^3$.
Wenn man a und b als Linearkombination des kanonischen Basis $e1, e2, e3$ des R^3 schreibt ,dann gilt nach 1) und 2) ,dass $a \times b$ durch die Produkt $ei \times ej$ festgelegt ist.
Aus der Definition gilt :

1.3)
$ei \times ei = 0$
$ei \times ej = -ej \times ei$
$ei \times ej = ek$

In der Algebra $(R^3, \times)$ gilt das Assoziativ-Gesetz nicht .
Zum Beispiel: $(e1 \times e1) \times e2 = 0$,aber $e1 \times (e1 \times e2) = -e2$
Es gibt zwei Ersätze für das Assoziativ-Gesetz:

- Grassmann-Identität:
$a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$

- Jacobi-Identität:
$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

Die Jacobi-Identität kann man erhalten ,wenn man a,b,c in der Grassmann-Identität zyklischvertauscht und addiert .

1.4) $a \times b = 0$ dann gilt $\forall a \in R^3 \Longrightarrow b = 0$.

1.5) $a \times b = 0 \Longleftrightarrow a$ und b sind linear abhängig .

Beweis:
$\Longrightarrow$ ist $a = 0$,so sind a und b linear abhängig .
sei jetzt $a \neq 0$, $a \times b = 0$,dann gilt nach der Definition vom Vektorprodukt :
$\forall i \neq j : a_i b_j = b_j a_i$
da auch für i=j und mit einem $a_{i0} \neq 0$,
$\forall j$: $\mathrm{b}_j = \frac{b_{i0}}{a_{i0}} a_j$.
dh: $b = \frac{b_{i0}}{a_{i0}} a = \lambda . a$ wobei $\lambda = \frac{b_{i0}}{a_{i0}}$.
also a und b sind linear abhängig.
$\Longleftarrow OBdA$, sei a $= \lambda b$
$a \times b = \lambda b \times b = \lambda(\underbrace{b \times b}_{=0}) = 0.$

1.6) $a \times (a \times (a \times c)) = - \langle a, a \rangle \, a \times c.$

Beweis:
Wenn man die Grassmann-Identität verwendet und mit a multipliziert ,dann erhaltet man :
$a \times (a \times (a \times c) = a \left(\langle a, c \rangle \, a \right) - a \left(\langle a, a \rangle \, c \right)$
$= \underbrace{a \times a}_{=0} \langle a, c \rangle - \langle a, a \rangle \, a \times c$
$= - \langle a, a \rangle \, a \times c.$

Bemerkung:

Eine Algebra mit einem Produkt ,welches antikommutativ ist und der Jacobi-Identität genügt,nennt man nach dem norwegischen Mathematiker *Sophie Lie* (1842-1988) eine Lie-Algebra.
Solche Algebren sind für viele Gebiete der Mathematik und Physik von besonderer Bedeutung.

(2) Zusammenhang mit Determinanten:

Für die 3×3 Matrizen kann man die Regel von Sarrus benutzen ,um die Determinante zu berechnen.

$$det(a,b,c) = det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma 2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma 3 \end{pmatrix}$$

$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \beta_1\gamma_2\alpha_3 + \gamma_1\alpha_2\beta_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \beta_1\gamma_3\alpha_2 - \gamma_1\alpha_3\beta_2$

Nach der Regel von Sarrus gilt :

2.1) $det(a,b,c) = \langle a \times b, c\rangle$

2.2) $\langle a \times b, c\rangle = \langle a, b \times c\rangle$

Wenn c und b gleich sind ,dann folgt : $\langle a \times b, b\rangle = 0$

Aus Symmetriegründen gilt auch : $\langle a \times b, a\rangle = 0$

Da das Skalarprodukt biliniear ist ,gilt :

2.3) $a \times b$ ist orthogonal zu allen Vektoren aus Ra+Rb

Ist die kanonische Basis $e1, e2, e3$ des R^3 positiv orientiert so gilt nach 1.6) und 2.1)

2.4) Wenn a, b linear unabhängig sind ,dann bilden $a, b, a \times b$ eine positive orientierte Basis des R^3 .

Aus der Grassmann-Identität und 2.1) folgt das Lemma:

Lemma : Für $a, b, c, d \in R^3 gilt (a \times b) \times (c \times d) = det(a,b,d)c - det(a,b,c)d.$

Beweis:
$det(a,b,d)c - det(a,b,c)d = \langle a \times b, d\rangle\, c - \langle a \times b, c\rangle\, d = (a \times b) \times (c \times d).$

2.5) $A(Aa \times Ab) = (detA).a \times b$

2.6)$Wenn\ a, b, c, d \in R^3$ sind dann gilt : $\langle a \times b, c \times d\rangle = \langle a, c\rangle \langle b, d\rangle - \langle b, c\rangle \langle a, d\rangle$.

(3) Geometrische Deutung:

In Verschärfung der *Cauchy-schwarzschen Ungleichung* gilt :

3.1) $\langle a,b\rangle^2 + |a\times b|^2 = |a|^2 \, . \, |b|^2$

Beweis:
mit Grassmann-Identität und 2.2) gilt :
$|a\times b|^2 = \langle a\times b, a\times b\rangle = \langle a, b\times(a\times b)\rangle$
$= \langle a, \langle b,b\rangle\, a - \langle b,a\rangle\, b\rangle$
$= \langle a, \langle b,b\rangle\, a\rangle - \langle a, \langle b,a\rangle\, b$
$= \langle b,b\rangle \langle a,a\rangle - \langle b,a\rangle \langle a,b\rangle$
$= |a|^2 \, . \, |b|^2 - \langle a,b\rangle^2 \, .$

Sei Θ der Winkel zwischen a und b mit $0 \leq \Theta \leq \Pi$ dann gilt :

3.2) $\langle a,b\rangle = |a| \, . \, |b| \, .cos\ \theta$

Beweis: Das gilt nach der Definition vom Cosinus .

weil $sin\theta \geq 0\ gilt$ nach 3.1)

3.3) $|a\times b| = |a| \, . \, |b| \, .sin\theta.$

Beweis: nach 3.1) und 3.2) gilt:
$|a\times b|^2 = |a|^2 \, . \, |b|^2 - \langle a,b\rangle^2$
$= |a|^2 \, . \, |b|^2 - |a|^2 \, . \, |b|^2 \, .cos^2\theta$
$= |a|^2 \, . \, |b|^2 \, [1 - cos^2\theta]$
$= |a|^2 \, . \, |b|^2 \, .sin^2\theta$
Also es gilt : $|a\times b| = |a| \, . \, |b| \, .sin\theta$ und die Eigenschaft ist bewiesen .

In der Ebene Ra+Rb wird das Parallelogramm von a und b aufgespannt .
$a\times b$ ist orthogonal zu Ra + Rb .

Die Fläsche von diesem Parallelogramm ist gleich $|a| \, . \, |b| \, .sin\theta$

Die Richtung wird dadurch gegeben ,dass die geordnete Basis $a, b, a\times b$ nach 2.4) positiv orientiert ist .

Eine Basis des $\in R^3$ ist positiv orientiert ,wenn die die gleiche Orientierung wie die kanonische Basis $e1, e2, e3$ hat .

Man kann das durch die Rechte-Hand-Regel oder Rechtsschraubenregel erkennen .

(4)Parallelotope:

$a, b, c \in R^3$ sind linear unabhängige .

Ein Parallelotop wird beschrieben als : P $_{a,b,c} = \{\alpha a + \beta b + \gamma c : 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1\}$.

Die Ebene $E_{0,a,b}$ ist durch a und b aufgespannt .

Der Abstand zwischen $E_{0,a,b}$ und c kann man wie folgt rechnen :

$d(c, E_{0,a,b}) = \frac{|\langle a\times b, c\rangle|}{|a\times b|}$

Das Volume von $P_{a,b,c}$ = Gründfläsche von $E_{0,a,b}\times$ Höhe in der Gestalt.

Vol P$_{a,b,c} = |\langle a \times b, c\rangle| = |det(a, b, c)|$.

§2) Sphärische Geometrie:

Die sphärische Geometrie oder die Kugelgeometrie ist die Geometrie auf der Kugel oder man nennt die auch die Geometrie auf der Erdoberfläche.
Die befasst sich mit Punkten und Punktmengen auf der Kugel.
Die sphärische Geometrie unterscheidet sich in einigen Punkten stark von der euklidische Geometrie .

zum Beispiel :

∗ Auf der kugeloberfläche gibt es keine Geraden ,aber ein vielzahl unterschiedlischer Kreise.

∗ Satz von Pythagoras gilt nicht .

∗ Die Winkelsumme im sphärische Dreieck muss größer als 180 ° und kleiner als 540 ° .

∗ Die sphärische Geometrie besitzt keine Parallelen .

∗ Die Strecken sind auf der Kugel Großkreisbögen .

∗ Die Kugel Koordinaten von einem Standort sind Winkeln .

1)Das sphärische Dreieck:

Unter einem sphärische Dreieck versteht man ein Dreieck auf einer Kugeloberfläche .
Für ein sphärische Dreieck soll gelten :

• Die Vektoren $a, b, c \in R^3$ sollen linear unabhängig sein und die Länge 1 haben ,das heißt $|a| = |b| = |c| = 1$.

- $det(a, b, c) > 0$ also a, b, c sind positiv orientiert .

A , B, C sind die Winkeln zwischen den Vektoren und heißen die Seiten des Dreiecks und es gilt:

1.1)

$cosA = \frac{\langle b,c \rangle}{|b|.|c|} = \langle b, c \rangle$.

$cosB = \frac{\langle a,c \rangle}{|a|.|c|} = \langle a, c \rangle$.

$cosC = \frac{\langle b,a \rangle}{|b|.|a|} = \langle b, a \rangle$.

Beweis : nach der Definition von Cos .

α, β, γ sind die winkeln zwischen den von zwei Vektoren aufgespannten Ebenen und sind wie folgt defniert :

1.2)

$cos\alpha = \frac{\langle a\times c, a\times b \rangle}{|a\times c|.|a\times b|}$

$cos\beta = \frac{\langle b\times a, b\times c \rangle}{|b\times a|.|b\times a|}$

$cos\gamma = \frac{\langle c\times b, c\times a \rangle}{|c\times b|.|c\times a|}$

1.3) $det(a, b, c) = sin\alpha.sinB.sinC$

Beweis:
Da a normiert ist, $(|a| = 1)$ und mit Hilfe vom Lemma aus §1 gilt :
$det(a, b, c) = |det(a, b, c).a|$
$= |(a \times b) \times (a \times c)|$
$=|a \times b| \times |a \times c| .sin\alpha$
$=$ sin C .sin B .sin α

Folgerung nach 1.3)

$sin\alpha = \frac{det(a,b,c)}{sinB.sinC} \Longrightarrow \frac{sin\alpha}{sinA} = \frac{det(a,b,c)}{sinA.sinB.sinC}$.

Der rechte Seite ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung und aus diesem Grund erhält man die Sinus-Satz :

$\frac{sin\alpha}{sinA} = \frac{sin\beta}{sinB} = \frac{sin\gamma}{sinC}$

• In der euklidischen Geometrie sind die Sinus-Satz und Cosinus-Satz wie folgt definiert :

• Sind $a, b,$ und c die Seiten eines Dreiecks ,α, β und γ sind die jeweils gegenüber

liegenden Winkel ,

dann gilt mit der Sinusfunktion sin : $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$

und mit der Cosinusfunktion :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos\alpha$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.cos\beta$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos\gamma$

1.Cosinus Satz : $cosA = cosB.cosC + sinB.sinC.cos\alpha$

Beweis:
sinB.sinC.cos$\alpha = |a \times c| . |a \times b| .cos\alpha$
$= \langle a \times c, a \times b \rangle$
$= \langle a, a \rangle . \langle b, c \rangle - \langle a, b \rangle . \langle a, c \rangle$
$= cosA - cosC.cosB$

2.Cosinus.Satz: $sinC.cosB = sinB.cosC.cos\alpha + sinA.cos\beta$**.**

Beweis : Die Behauptung ist gleichwertig mit :
$|a \times b|^2 . \langle a, c \rangle = \langle a, b \rangle \langle a \times c, a \times b \rangle + \langle b \times a, b \times c \rangle$
verwende rechts zweimal 2.6) aus §1 dann hat man die Behauptung .

Als Anwendung von 1.Cosinus.Satz ist die folgende Aufgabe:

Die Strecke zwischen Moskau und Berlin zu bestimmen .

• Allgemein gilt :Die auf der Erdoberfläche gemessene Enfernung zweier Punkte P1 und P2 lässt sich mit den Breiten $\varphi 1$ und $\varphi 2$ und den Längen $\lambda 1$ und $\lambda 2$ mit Hilfe 1.Cosinus Satz bestimmen .

• Die Länge λ und die Breite φ sind die geographische Koordinaten eines Standortes.

• Eine große Kreis kann man erhalten ,wenn man der Kugel mit einer Ebene durch der Mittelpunkt schneidet .

• Der Breitengrad eines Ortes ist genau die Winkelentfernung auf diesem Großkreis bis zum Äquator.

• Die Länge ist die Winkel zwischen zwei Großkreise und der Meridian.

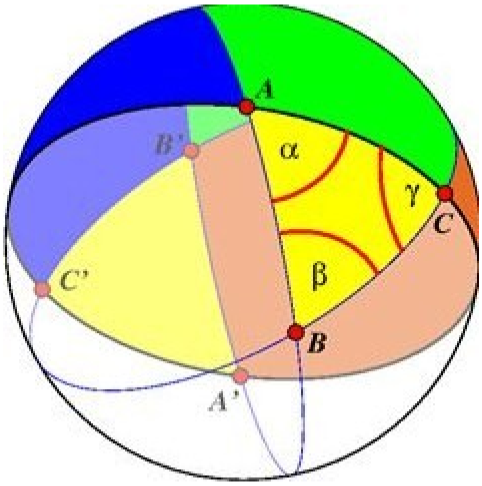

Abbildung 1: Das Bild zeigt

- Moskau hat die Länge $\lambda 1$ = 36,6° ö.L und die Breite $\varphi 1$ = 55,8°n.B

- Berlin hat die Länge $\lambda 2$ = 13,4° ö.L und die Breite $\varphi 2$ = 52,5°n.B

- Die Höhe von Äquator bis Nordpol N ist gleich 90 ° also :

$\varphi 1 + C = 90\ ° \Longrightarrow C = 90° - \varphi 1$
$\varphi 2 + B = 90\ ° \Longrightarrow B = 90\ ° - \varphi 2$

nach 1. Cosinus Satz gilt:

- cosA = cos(90° - $\varphi 2) cos(\ 90° - \varphi 1) + sin(\ 90°\ - \varphi 2) sin(\ 90°\ - \varphi 1) cos(\lambda 2 - \lambda 1)$

= sin$\varphi 1 . sin\varphi 2 + cos\varphi 1 . cos\varphi 2 . cos(\lambda 2 - \lambda 1)$

= 0,969

$\Longrightarrow A = arccos(0,969) \cong 15\ °$

- Die Länge der Erde ist ungefähr 40000 km also ist die Strecke zwischen Moskau und Berlin

= $\frac{40000 \times 15}{360} \cong 1666 Km.$