Proseminar Lineare Algebra SS10

Symmetrische Polynome,Diskriminante und Resultante, Fermatscher Satz für Polynome

Natalja Shesterina

Heinrich-Heine-Universität

Betreuung: Prof. Dr. Oleg Bogopolski

A.Symmetrische Polynome

Definition 1. *Sei $n \in \mathbb{N}$,$n>1$, K ein kommutativer Ring. Dann heißt ein Polynom $p \in K[t_1, \ldots, t_n]$* symmetrisch *in $t_1, \ldots, t_n, falls$*

$$p(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}) = p(t_1, \ldots, t_n)$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_n$ gilt.

Bemerkung 1. *Die Menge von symmetrischen Polynomen ist ein Unterring von $K[t_1, \ldots, t_n]$.*

Beispiel 1. *a) Betrachtet man die Polynome*

$$p = X + Y - 1$$

und

$$q = X + Y^2,$$

so erhält man durch Vertauschen von X und Y die Polynome

$$\widetilde{p} = Y + X - 1$$

bzw.

$$\widetilde{q} = Y + X^2.$$

Dann erhält man im Fall von p also dasselbe Polynom, d.h. p ist symmetrisch in X und Y, im Fall q erhält man ein anderes Polynom, q ist nicht symmetrisch.

b) Man beachte, dass n (die Anzahl von Variablen) festgelegt werden muss. So ist

$$f = t_1 + t_2$$

symmetrisch als Polynom in t_1, t_2, aber nicht symmetrisch als Polynom in t_1, t_2, t_3, da z.B.

$$f(t_1, t_2, t_3) = t_3 + t_2 \neq f$$

ist.

Definition 2. *Sei x eine Variable. Wir bilden ein Polynom*

$$f(x) = (x - t_1) \cdots (x - t_n) = x^n - s_1 x^{(n-1)} + s_2 x^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n s_n,$$

wobei jedes

$$s_i = s_i(t_1, \ldots, t_n)$$

ein Polynom in $t_1, \ldots, t_n$ ist,

$$s_1 = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$$

$$s_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + \cdots + t_1t_n + t_2t_3 + \cdots + t_{n-1}t_n$$

$$s_3 = t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + \cdots + t_{n-2}t_{n-1}t_n$$

$$\vdots$$

$$s_n = t_1t_2 \cdots t_n$$

Die Polynome $s_1, s_2, \ldots, s_n$ heißen elementarsymmetrische Polynome *in $t_1, \ldots, t_n$. Das Polynom*

$$f = x^n - s_1x^{(n-1)} + s_2x^{(n-2)} - \cdots + (-1)^n s_n$$

aus dem Polynomring $K[t_1, \ldots, t_n](x)$ heißt allgemeines Polynom n-ten Grades.

Definition 3. Der Grad des Monoms $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ *ist* $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ *, und* das Gewicht dieses Monoms *ist* $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n$. Der Grad bzw. das Gewicht *eines Elements $g \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ist der größte Grad bzw. das größte Gewicht eines in g auftretenden Monoms.*

Theorem 1. *Sei $f(t) \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom vom Grad d. Dann existiert ein Polynom $g(X_1, \ldots, X_n)$ mit dem Gewicht $\leq d$, so dass*

$$f(t) = g(s_1, \ldots, s_n)$$

gilt (d.h. jedes symmetrische Polynom ist eindeutig darstellbar als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $s_1, \ldots, s_n$).

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch volständige Induktion über n, und für fixiertes n durch vollständige Induktion über d.

Für $n = 1$ ist die Aussage klar, weil $s_1 = X_1$. Sei nun $n > 1$. Für $h \in K[X_1, \ldots, X_n]$ bezeichne $\overline{h}$ das Polynom $h(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, 0)$ in den Variablen $X_1, \ldots, X_{n-1}$. Man beachte , dass $\overline{s_1}, \overline{s_2}, \ldots, \overline{s_{n-1}}$ gerade die elementarsymmetrischen Polynome in $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ sind.

Sei nun f wie im Theorem. Dann ist $\overline{f}$ ein symmetrisches Polynom in $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ vom Grad höchstens d. Nach Induktionsannahme gibt es ein Polynom $h \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ vom Gewicht höchstens d mit $\overline{f} = h(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_{n-1}})$. Betrachte $\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) - h(s_1, \ldots, s_{n-1})$. Offenbar ist Δ symmetrisch in $X_1, X_2, \ldots, X_n$ und hat Grad höchstens d. Wegen $\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, 0) = \overline{f} - h(\overline{s_1}, \ldots, \overline{s_{n-1}}) = 0$ ist $\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ durch X_n teilbar. Da Δ symmetrisch in den X_i ist , ist Δ durch alle X_i teilbar. Es gibt also $r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\Delta(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X_1X_2 \ldots X_nr(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, also $\Delta = s_nr$. Da Δ einen Grad höchstens d hat, ist der Grad von r höchstens $d-n$. Nach Induktionsannahme existiert somit ein $\widetilde{g} \in K[X_1, \ldots, X_n]$vom Gewicht höchstens $d - n$ mit $r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \widetilde{g}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Aus $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = h(s_1, \ldots, s_{n-1}) + s_n\widetilde{g}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ folgt schließlich die Behauptung.

□

Beispiel 2. *a) Sei gegeben $n = 2$,*

$$f = (x_1 - x_2)^2,$$

bestimme $g_s(x_1, x_2)$ mit $f = g_s(s_1, s_2)$.

Offensichtlich ist s symmetrisch,

$$f = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2,$$

$$s_1 = x_1 + x_2, s_2 = x_1x_2$$

In f ist x_1^2 mit Exponentialpaar $(2, 0)$ ein Monom mit maximalem Gewicht. Somit gilt nach Theorem 1:

$$g_1(s_1, s_2) = s_1^{2-0}s_2^0 = s_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Es gilt

$$f - g_1(s_1, s_2) = -4x_1x_2.$$

Bistimme wieder ein Monom mit maximalem Gewicht. Es ist x_1x_2 mit $(1, 1)$ als Exponentialpaar. Deswegen gilt $g_2(s_1, s_2) = -4s_1^{1-1}s_2^1 = -4s_2$
und

$$f - g_1(s_1, s_2) - g_2(s_1, s_2) = 0.$$

Daraus folgt

$$f = s_1^2 - 4s_2 \ , g_s = x_1^2 - 4x_2$$

b) Zu

$$f := x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$$

gebe ein Polynom $g_s(x_1, x_2, x_3)$ mit $f = g_s(s_1, s_2, s_3)$ an. Da s symmetrisch ist, gibt es also nach Theorem 1 ein solches Polynom g_s. Man geht, wie bei dem obiden Beispiel vor.

Das größte Monom in f ist $x_1^2x_2^2$, das zugehörige Exponentialtripel ist $(2, 2, 0)$. Daher definiert man

$h_1 = g_1(s_1, s_2, s_3) = s_1^{2-2}s_2^{2-0}s_3^0 = s_2^2 = (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2 = x_1^2x_2^2+\cdots+2x_1^2x_2x_3+\ldots.$

Es ist

$$g - h_1 = -2x_1^2x_2x_3 + \ldots$$

Das größte Monon in $f - h_1$ ist $x_1^2x_2x_3$,und das zugehöriges Exponentialtripel ist $(2, 1, 1)$. Daher setzt man

$$h_2 = s_1^{2-1}s_2^{1-1}s_3^1 = s_1s_3 = (x_1 + x_2 + x_3)x_1x_2x_3 = x_1^2x_2x_3 + \ldots.$$

Man sieht, dass $f - h_1 = -2h_2$ ist. Daher gilt

$$f = h_1 - 2h_2 = s_2^2 - 2s_1s_3.$$

Das gesuchte Polynom g_s ist also $g_s = x_2^2 - 2x_1x_3$.

c) (Als Übung)

Zu $f = (x_2 - x_1)^2(x_3 - x_1)^2(x_3 - x_2)^2$, $n = 3$ gebe ein Polynom $g_s(x_1, x_2, x_3)$ mit $g_s(s_1, s_2, s_3)$ an.

Die Lösung: $f = s_1^2s_2^2 - 4s_1^3s_3 - 4s_2^3 + 18s_1s_2s_3 - 27s_3^2$ und $g_s = x_1^2x_2^2 - 4x_1^3x_3 - 4x_2^3 + 18x_1x_2x_3 - 27x_3^2$

B.Die Diskriminante

Definition 4. *Sei K ein Körper und* $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in K[x]$ *ein Polynom. Ferner seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *die Nullstellen von f. Dann nennen wir*

$$D(f) := a_0^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

die Diskriminante *von f.*

Satz 1. *Sei Grad* $f = n$*. Dann kann man ein Polynom g über K in n Unbestimmten berechnen mit*

$$D(f) = a_0^{2n-2} g(\frac{-a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{(-1)^n a_n}{a_0}).$$

Beweis. Ersetzen wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in der Definition von D(f) durch Unbestimmte $x_1, \ldots, x_n$, so erhält man ein Polynom $D(\mathrm{x}_1, \ldots, x_n)$ aus $K[\mathrm{x}_1, \ldots, x_n]$. Ist $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation, so liefert $\{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ eine Permutation der Menge $\{\{i, j\} : i \neq j \wedge i, j \in \{1, \ldots, n\}\}$. Jedem solchen Paar entspricht genau ein Term $(x_i - x_j)^2$ mit $i < j$. Daher entsprechen diese Terme umkehrbar eindeutig den Termen $(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})^2$, denn das Vorzeichen spielt wegen des Quadrats keine Rolle. Damit ist

$$d(x_1, \ldots, x_n) := \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 = \prod_{i<j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})^2 = d(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

d ist ein symmetrisches Polynom. Nach dem Theorem 1 gibt es ein Polynom $g \in K[x_1, \ldots, x_n]$, das wir effektiv berechnen können, mit $d(x_1, \ldots, x_n) = g(s_1, \ldots, s_n)$. Nun ist

$$\prod (x - \alpha_j) = \frac{1}{a_0} f = x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{a_0}.$$

Nach Definition der elementarsymmetrischen Polynome folgt:

$$s_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (-1)^j \frac{a_j}{a_0}.$$

Dies ergibt

$$D(f) = a_0^{2n-2} g(\frac{-a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{(-1)^j a_n}{a_0}).$$

□

Beispiel 3. *Mit Hilfe der Ergebnissen aus dem Beispiel 2:*

$$(x_2 - x_1)^2 = s_1^2 - 4s_2$$

und

$$(x_1 - x_2)^2 (x_3 - x_1)^2 (x_3 - x_2)^2 = s_1^2 s_2^2 - 4s_1^3 s_3 - 4s_2^3 + 18 s_1 s_2 s_3 - 27 s_3^2$$

berechne die Diskriminanten vom Polynom zweiten und dritten Grades aus $K[x]$.

Lösung: Sei $f = a_0x^2 + a_1x + a_2$. Dann nach Theorem 1 und Satz 1 gilt:
für $n = 2$: $D(f) = a_0^2(\frac{a_1^2}{a_0^2} - 4\frac{a_2}{a_0}) = a_1^2 - 4a_0a_2$.
Sei nun $n = 3$ und $f = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$. Dann ist
$D(f) = a_0^4(\frac{a_1^2a_2^2}{a_0^2a_0^2} - 4\frac{(-a_1^3)(-a_3)}{a_0^3a_0} - 4\frac{a_2^3}{a_0^3} + 18\frac{(-a_1)a_2(-a_3)}{a_0a_0a_0} - 27\frac{a_3^2}{a_0^2}) = a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 + 18a_0a_1a_2a_3 - 27a_0^2a_3^2$.
***Insbesondere**: für $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ folgt für das Polynom $f(x) = x^3 + a_2x + a_3$ $D(f) = -4a_2^3 - 27a_3^2$.*

Beispiel 4. *Berechne die Diskriminante für $f = 2x^2 + 5x + 8$.*
Lösung: $D(f) = a_1^2 - 4a_0a_2$ für $f = a_0x^2 + a_1x + a_2$ liefert $D(f) = 25 - 4 * 2 * 8 = -39$ (d.h. f hat 2 verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$).

C.Fermatscher Satz für Polynome

Theorem 2. *(Mason-Stothers): Seien $a(t), b(t)$ und $c(t)$ teilerfremde, nicht-konstante Polynome mit $a + b = c$. Dann ist*

$$max(grad\{a, b, c\}) \leq N_0(abc) - 1,$$

wobei $N_0(c)$ die Anzahl der verschiedenen Nullstellen von c ist.

Beweis. Dividiere Polynome a, b durch c, und definiere $f := \frac{a}{c}$,$g := \frac{b}{c}$, dann ergibt sich, dass $f + g = 1$, wobei f,g rationale Funktionen sind.

Durch Differenzieren, erhalten wir $f' + g' = 0$, schreiben das als

$$\frac{f'f}{f} + \frac{g'g}{g} = 0,$$

so dass

$$\frac{b}{a} = \frac{g}{f} = \frac{\frac{-f'}{f}}{\frac{g'}{g}}.$$

Wir definieren:

$$a(t) = c_1 \prod (t - \alpha_i)^{m_i}$$

$$b(t) = c_2 \prod (t - \beta_j)^{n_j}$$

$$c(t) = c_3 \prod (t - \gamma_k)^{r_k}$$

Dann bekommen wir

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{-f'}{f}}{\frac{g'}{g}} = -\frac{\sum \frac{m_i}{t-\alpha_i} - \sum \frac{r_k}{t-\gamma_k}}{\sum \frac{n_j}{t-\beta_j} - \sum \frac{r_k}{t-\gamma_k}}.$$

Ein gemeinsamer Nenner für f'/f und g'/g ist das Produkt

$$N_0 = \prod (t - \alpha_i) \prod (t - \beta_j) \prod (t - \gamma_k),$$

dessen Grad ist $N_0(abc)$. $N_0(f'/f)$ und $N_0(g'/g)$ sind beide Polynome vom Grad $N_0(abc)-1$. Aus Beziehung $\frac{b}{a} = \frac{-N_0(f'/f)}{N_0(g'/g)}$ und der Tatsache,dass a,b teilerfremd sind, leiten wir die Ungleichung für unseres Theorem ab. □

Satz 2. *(Fermatscher Satz für Polynome): Sein $x(t), y(t)$ und $z(t)$ teilerfremde Polynome, und einer von ihnen hat Grad ≥ 1, so dass*

$$x(t)^n + y(t)^n = z(t)^n$$

gilt.(D.h. Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ besitzt für ganzzahlige x,y,z $\neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ keine Lösung.)

Beweis. Wir zeigen Existenz einer Lösung der Gleichung für $n \leq 2$. Wenn x(t) maximalen Grad hat, so folgt nach Theorem 2:

$$n * grad(x) = grad(x(t))^n \leq grad(x(t)) + grad(y(t)) + grad(z(t)) - 1.$$

Im Fall, dass y(t) oder z(t) den maximalen Grad hat, erhalten wir:

$$n * grad(y) = grad(y(t))^n \leq grad(x(t)) + grad(y(t)) + grad(z(t)) - 1,$$

$$n * grad(z) = grad(z(t))^n \leq grad(x(t)) + grad(y(t)) + grad(z(t)) - 1.$$

Die Addition von drei Ungleichungen ergibt:

$$n(grad(x) + grad(y) + grad(z)) \leq 3(grad(x) + grad(y) + grad(z)) - 3$$

Das ergibt wiederum einen Widerspruch wenn $n \geq 3$. □

D. Die Resultante

Definition 5. *Seien $f = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ und $g = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ Polynome aus $K[x]$.* Die Resultante *der Polynome f und g, bezeichnet mit res(f,g), ist die Determinante von*

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & \\ & & \vdots & & & \\ & & & a_0 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_n & \\ & & \vdots & & & \\ & & & b_0 & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Satz 3. *Seien* $f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ *und* $g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n$ *Polynome. Dann:*

1) Es existieren Polynome $G(x)$ *und* $F(x)$*, so dass* $grad(G) < m$*,*$grad(F) < n$ *ist und*

$$res(f, g) = fG + gF$$

gilt.

2) $res(f, g) = 0 \iff f, g$ *einen gemeinsamen Faktor haben, der von* x *abhängt oder* $a_0 = b_0 = 0$ *ist.*

3) $res(f, g)$ *ist als eine Funktion von* $a_0, \ldots, a_n$ *homogen von Grad* m *und ist als eine Funktion von* $b_0, \ldots, b_n$ *homogen von Grad* n*.*

4) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *Nullstellen von* $f(x)$ *und seien* $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *Nullstellen von* $g(x)$*. Dann gilt*

$$res(f, g) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^{m} f(\beta_j) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j).$$

Beweis. von 4). Sei y eine Unbekannte. Dann ist $g(x)-y) = b_0x^m+\cdots+b_{m-1}x+(b_m-y)$ und so ist $res(f(x), g(x) - y)$ ein Polynom von y (siehe Definition von Resultant).Wir bezeichnen

$$R(y) = res(f(x), g(x) - y).$$

Setzen wir $y_j = g(\alpha_i)$, wobei α_i eine Nullstelle von $f(x)$ ist, $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$R(y_i) = res(f(x), g(x) - g(\alpha_i)).$$

Die Polynome $f(x)$ und $g(x) - g(\alpha_i)$ haben eine gemeinsame Nullstelle $x = \alpha_i$, also sie haben einen gemeinsamen Faktor $x - \alpha_i$. Aus 2) folgt dann $R(y_i) = 0$. Dann ist $(y - y_i)$ ein Teiler von $R(y)$.

Fall 1. Sei $y_1, \ldots, y_n$ verschieden. Dann ist $\prod_{i=1}^{n}(y - y_i)$ ein Teiler von $R(y)$. Wenn man die Definition von $R(y)$ mit Achtung analysiert, stellt man fest, dass Polynom $R(y)$ Grad n und die Hauptkoeffiziente $(-1)^n a_0^m$ hat. Deswegen gilt

$$R(y) = (-1)^n a_0^m \prod_{i=1}^{n} (y - y_i).$$

Setzen wir $y = 0$, erhalten wir

$$res(f(x), g(x)) = R(0) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} y_i = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i). \tag{0.1}$$

Fall 2. Sei $y_1, \ldots, y_n$ nicht unbedingt verschieden, Wir skizzieren eine Idee. Betrachten wir $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$, so dass α'_i nah zu α_i ist und $y'_1, \ldots, y'_n$ verschieden sind (hier, wie oben, $y'_i = g(\alpha'_i)$).

Dann sind die Koeffizienten von $\Phi(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i')$ nah zu Koeffizienten von $f(x) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ und so ist $res(\Phi(x), g(x))$ nah zu $res(f(x), g(x))$. Nach Fall 1 gilt $res(\Phi(x), g(x)) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i')$. Streben wir $\alpha_i' \to \alpha_i$, erhalten wir

$$res(f(x), g(x)) = a_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i).$$

□

Satz 4. *Es sei $f \in K[x]$ ein normiertes Polynom vom Grad $m > 0$ und f' seine Ableitung. Dann besteht zwischen der Diskriminante $D(f)$ und der Resultante $res(f, f')$ die folgende Beziehung:*

$$D(f) = (-1)^{m(m-1)/2} res(f, f').$$

Beweis. Angenommen, dass f über $K[x]$ volständig in Linearfaktoren zerfällt. Es gelte also $f = \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_i)$. Dann folgt aus dem Satz 3

$$res(f, f') = \prod_{i=1}^{m} f'(\alpha_i).$$

Aufgrund der Produktregel ergibt sich

$$f' = \sum_{i=1}^{m}(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \dots (x - \alpha_m)$$

und somit gilt

$$f'(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1) \dots (\alpha_i - \alpha_{i-1})(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \dots (\alpha_i - \alpha_m).$$

Dies bedeutet aber

$$res(f, f') = \prod_{i \neq j}(\alpha_i - \alpha_j) = (-1)^{m(m-1)/2} \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{m(m-1)/2} D(f).$$

□

Beispiel 5. *Sei $f = x^3 + px + q$ gegeben, berechne $D(f)$. Nach dem Satz 4 gilt:*

$$res(f', f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & p & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & -2p & -3q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2p & -3q \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix}$$

Nun Liefert Entwicklung nach Laplace:

$$D(f) = res(f, f') = -4p^3 - 27q^2.$$