Proseminar Lineare Algebra SS10

Exponentialabbildung für Matrizen
und
Systeme von Differentialgleichungen

Simon Strahlegger

Heinrich-Heine-Universität
Betreuung: Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Inhaltsverzeichnis:

I. Einleitung

In diesem Text werde ich die Exponentialabbildung für Matrizen und Systeme von Differentialgleichungen behandeln. Es wird das Exponential einer Matrix, sowie deren Bezug zu Differentialgleichungssystemen dargestellt.

Differentialgleichungen dienen im Allgemeinen zur Modellierung des zeitlichen Ablaufs von Vorgängen in Natur und Technik. Beispiele hierfür sind der freie Fall und die Planetenbahnen.
So möchte ich mich in diesem Text mit Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung , von der Form $y'(t)= Ay(t)$ auseinandersetzten.
Ich werde hierbei zwei Lösungswege vorstellen:

1. Lösungen von Differentialgleichungssystemen über diagonale Matrizen.
   Hierbei werde ich allgemeine Form von Differentialgleichungssystemen erläutern und die Vektor/Matrixwertige Grenzwertbildung, sowie Differentiation erläutern.

2. Lösung über die Exponentialabbildung für Matrizen.
   Hierbei werde ich wiederum das Exponential einer Matrix einführen und die Theorie von Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung auf die einer Matrix übertragen, um eine Lösung von Differentialgleichungs-systemen zu finden.

II. Systeme von Differentialgleichungen

2.1 Allgemeine Form von homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung

Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung haben die Form

$$y'(t)= ay(t)$$

in der Analysis II lernen wir, dass die allgemeine Form der Lösung von der Gestalt

$$y(t)= c\,e^{at} \qquad mit\ a, t \in \mathbb{R}\ und\ c\ konst.$$

ist.

Beweis: Sei y(t) eine beliebig oft differenzierbare reellwertige Funktion . Betrachtet man

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-at}\,y(t)) = -a\,e^{-at}\,y(t) + a\,e^{-at}\,y(t) = 0$$

daraus folgt $e^{-at}\,y(t)$ ist konstant, z.B. gleich c.

=> y(t)= $c\,e^{at}$ ist die allgemeine Form der Lösung.

2.2 Grenzwertbildung und Differentiation von Vektoren/Matrizen

Die Limes Bildung und das Differenzieren erfolgt bei Vektoren bzw. Matrizen komponentenweise.
Sei zum Beispiel:

$X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ein Vektor, dann ist $\lim_{t\to t_0} X(t)=\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ mit $\xi = \lim_{t\to t_0} x_i(t)$.

Analog verhält sich die Grenzwertbildung bei einer Matrix.

Bei der Differentiation von Vektoren/Matrizen verfährt man folgendermaßen:

$\frac{\partial}{\partial A}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}a_{11} & \dots \frac{\partial}{\partial t}a_{1n} \\ : & : \\ \frac{\partial}{\partial t}a_{m1} & \dots \frac{\partial}{\partial t}a_{mn} \end{pmatrix}$. Das heißt $\frac{\partial}{\partial A}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial X}$ existiert, wenn jede Komponente, also jede Funktion $x_i(t)\,bzw.\,a_{ij}(t)$ differenzierbar ist.

2.3 Systeme homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Die allgemeine Form von homogenen linearern Differentialgleichungen erster Ordnung ist hierbei:

$$y_1'(t)=a_{11}y_1(t)+\ldots+a_{1n}y_n(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n'(t)=a_{m1}y_1(t)+\ldots+a_{mn}y_n(t)$$

Also y'(t)=Ay(t).

Wenn A diagonalisierbar ist, ist die Lösung solcher Systeme recht einfach anzugeben. Denn die spezielle Lösung des Differentialgleichungssystems hat dann die Form:

$y(t)=e^{\lambda t}v$,

wobei v der Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

<u>**Beispiel:**</u> Sei $A=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

1. <u>Bestimmung der Eigenwerte:</u>

$$\chi_A=det(A-\lambda E)=(-1-\lambda)(4-\lambda)+6$$
$$=\lambda^2-3\lambda+2$$
$$=(\lambda-1)(\lambda-2)$$

=> $\lambda_1=2\, und\, \lambda_2=1$ ebenso χ_A zerfällt in Linearfaktoren und damit ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

2. <u>Bestimmung der Eigenvektoren:</u>

$$\begin{pmatrix}-1-\lambda & 6\\ -1 & 4-\lambda\end{pmatrix}*X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=2$: $\begin{pmatrix}-3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}*X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ => $x_1=2 \quad x_2=1$

$$\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 0 & 0\end{pmatrix}*X=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

daraus folgt: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1=2$.

Analog erhält man $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2=1$.

3.<u>Lösung des Differentialgleichungssystems y'(t)=Ay:</u>

Für $\lambda_1=2$ löst $\begin{pmatrix} 2\,e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ speziell das System von Differentialgleichungen.

Es ergibt sich also die Folgerung:

Korollar: Systeme von Differentialgleichungen lassen sich immer lösen, wenn A paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt.

Sonderfall: Ist A bereits eine Diagonalmatrix, dann hat das System von Differentialgleichungen y'(t)=At die Lösung:

$y_i(t)=c_i e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte von A sind.

Das die Form der Lösung in diesem Spezialfall so aussieht ist eigentlich klar, da bei einer Diagonalmatrix die Eigenwerte auf der Diagonalen stehen.

Nun bleibt nur noch die allgemeine Form der Lösung zu zeigen. Hierbei gilt:
Jede Lösung ist Linearkombination der speziellen Lösung.

Dies zeigt sich am besten, wenn wir A in die Diagonalform überführen.

Satz: Sei A eine $n\times n$ Matrix und $S\in Gl(n,K)$,
so dass $SAS^{-1}=\tilde{A}$ Diagonalform mit λ_1 ... λ_n Eigenwerte von A auf der Diagonalen hat.
Dann hat die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\frac{\partial}{\partial t}y=Ay(t)$$

die Form

$$y=S^{-1}+\tilde{y} \text{ , wobei } \tilde{y}_i=c_i e^{\lambda_i t} \text{ ist.}$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus dem Sonderfall, da $\tilde{A}$ jetzt Diagonalgestalt hat, kann die Gleichung mit der Exponentialfunktion gelöst werden.

<u>Beispiel:</u> Wir wollen y'(t)=Ay(t) lösen.

Sei $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Wir sahen $\lambda_1=2$ mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

und $\lambda_2=1$ ---------------"--------------------- $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$S^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist jetzt die Matrix, welche aus den Eigenvektoren entsteht, somit ist $S=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

daraus folgt:

$$\tilde{A}=SAS^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix}S^{-1}$$
$$=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 1 & -2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

=> $\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 e^{2t}\\ c_2 e^{t}\end{pmatrix}$ Nun also:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=S^{-1}*\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}c_1 e^{2t}\\ c_2 e^{t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1 e^{2t}+3c_2 e^{t}\\ c_1 e^{2t}+c_2 e^{t}\end{pmatrix}$$

also stammt jede Lösung aus dem Fundamentalsystem von Lösungen

$$y_1=\begin{pmatrix}2c_1 e^{2t}\\ c_1 e^{2t}\end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad y_2=\begin{pmatrix}3c_2 e^{t}\\ c_2 e^{t}\end{pmatrix} \quad .$$

Bemerkung: Bei komplexen Eigenwerten haben die Lösungen von Differentialgleichungen wieder die Form $c\,e^{\lambda t}$, dabei ist $e^{\lambda t}$ eine komplex-wertige Funktion. Die Theorie ist hierbei komplett übertragbar.
Deswegen möchte ich nur ein Beispiel zur Lösung von homogenen Differentialgleichungssystemen 1. Ordnung angeben.

Beispiel(komplexe Eigenwerte):

Sei $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ die Eigenwerte sind hierbei $\lambda_1=1+i$ mit Eigenvektor $\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$

$\lambda_2=1-i$ -------"----------- $\begin{pmatrix}i\\ -1\end{pmatrix}$

hieraus ergibt sich:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix} \qquad \textit{sowie} \qquad S=-\frac{1}{2}*\begin{pmatrix}-1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$$

=> $SAS^{-1}=\begin{pmatrix}1+i & 0\\ 0 & 1-i\end{pmatrix}=\tilde{A}$

hieraus ergibt sich analog zum reellen Fall:

$\tilde{y}=\begin{pmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 e^{t+it}\\ c_2 e^{t-it}\end{pmatrix}$ woraus sich $y=S^{-1}*\tilde{y}=\begin{pmatrix}c_1 e^{t+it}+ic_2 e^{t-it}\\ ic_1 e^{t+it}+c_2 e^{t-it}\end{pmatrix}$ ergibt.

Alle Lösungen ergeben sich wiederum aus dem Fundamentalsystem von Lösungen:

$y_1=\begin{pmatrix} e^{t+it} \\ i\,e^{t+it} \end{pmatrix}$ *sowie* $y_2=\begin{pmatrix} i\,e^{t-it} \\ e^{t-it} \end{pmatrix}$ als Linearkombination.

Dies lässt sich jetzt noch mittels der Gleichung $e^{u+iv}= e^u*(\cos(v)+i*\sin(v))$
in ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen überführen.
Es ergibt sich:

$y_1=\begin{pmatrix} e^t\cos(t) \\ -e^t\sin(t) \end{pmatrix}$ *sowie* $y_2=\begin{pmatrix} e^t\sin(t) \\ e^t\cos(t) \end{pmatrix}$.

III. Die Exponentialabbildung für Matrizen

Zunächst ist festzustellen, Systeme homogener linearer Differentialgleichungen 1.Ordnung lassen sich auch direkt durch die Exponentialabbildung für Matrizen lösen, dazu:

3.1 Das Exponential einer $n\times n$ Matrix

Definition: Die Exponentialfunktion für eine $n\times n$ Matrix A wird wie folgt gebildet:

$$\exp(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)*A^n=E+A+\frac{1}{(2!)}*A^2+\frac{1}{(3!)}*A^3+\dots$$

Beispiel: Sei $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\exp(A)= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\frac{1}{(2!)}*\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{(3!)}*\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\dots$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Im allgemeinen ist es jedoch weitaus schwerer die Einträge von exp(A) anzugeben, da nur in Sonderfällen die Potenzen von A gleich der Nullmatrix sind, sowie auch nicht einfach nur das Exponential der Einträge gebildet werden kann.
Letzteres funktioniert nur, wenn A Diagonalform hat.

Es gilt jedoch folgendes:

Satz: Die Exponentialreihe konvergiert für alle komplexen Matrizen absolut.

Beweis: Um die Konvergenz zu zeigen, zeigen wir, dass die Absolutbeträge der einzelnen Einträge $(e^A)_{ij}$ eine beschränkte Reihe bilden.
Dazu definieren wir die Norm von A ,

$$\|A\| = max_{ij}|A_{ij}|$$

als das Maximum der Absolutbeträge der Matrixeinträge.
Es gilt also: $|A_{ij}| \leqslant \|A\|$ für alle i,j.

Um den Satz zu beweisen benötigen wir noch folgendes Lemma,

Lemma: Seien $A, B \in Mat(n, \mathbb{C})$ Dann gelten

$$\|AB\| \leqslant n * \|A\| \|B\| \quad \text{und} \quad \|A^k\| \leqslant n^{(k-1)} \|A\|^k \quad \text{für alle} \quad k > 0$$

Bewies: Es gilt:

$$|(AB)_{ij}| = |(\sum_{\nu} A_{(i\nu)} B_{(i\nu)})| \leqslant \sum_{\nu} |A_{(i\nu)}||B_{(i\nu)}| \leqslant n * \|A\| \, \|B\|$$

also $\|AB\| \leqslant n * \|A\| \, \|B\|$. Die zweite Ungleichung folgt per Induktion aus der ersten.

Um nun die Konvergenz zu beweisen, schätzen wir die Einträge wie folgt ab:
Sei $a = n * \|A\|$. Dann gilt:

$$|(e^A)_{ij}| \leqslant |E_{ij}| + |A_{ij}| + |\frac{1}{2!} * (A^2)_{ij}| + \ldots \leqslant 1 + \|A\| + \frac{1}{2!} n \|A\|^2 + \frac{1}{3!} n^2 \|A\|^3 + \ldots$$

$$= \frac{(1 + (a + \frac{1}{2!} a^2 + \frac{1}{3!} a^3 + \ldots))}{n}$$

$$= \frac{(1 + (e^a - 1))}{n}$$

=> exp(A) ist konvergent.

Nun wollen wir das Exponential einer diagonalisierbaren Matrix bestimmen.
Wir wissen es gilt:

$$S e^A S^{-1} = SES^{-1} + SAS^{-1} + \frac{(SAS^{-1})^2}{n!} + \frac{(SAS^{-1})^3}{3!} + \ldots = e^{SAS^{-1}}$$

und die Koordinatentransformation $SAS^{-1} = \tilde{A}$ A in Diagonalform $\tilde{A}$ überführt, folgt daraus, dass

$\exp(A) = S^{-1} e^{\tilde{A}} S$ ist.

Zur Lösung von Differentialgleichungssystemen müssen wir jetzt noch die Funktionalgleichung der Exponentialabbildung
für Matrizen verifizieren, d.h

$e^{x+y}=e^x * e^y$ muss auf Matrizen übertragen werden.

Satz: Seien $A, B \in Mat(n, \mathbb{C})$ zwei kommutative Matrizen, dann gilt

$$e^{A+B}=e^A * e^B$$

hieraus folgt unmittelbar die Inversenbildung von e^A durch e^{-A}, falls e^A invertierbar ist, denn es gilt:

$$e^A * e^{-A}=e^{A-A}=e^0=E \quad .$$

Da man durch die Matrizen nicht ohne weiteres die Gleichheit beider Reihen zeigen kann, benötigen wir folgenden Satz für den Beweis der Funktionalgleichung.

Satz: Für $A \in Mat(n, \mathbb{C})$ ist e^{At} differenzierbar nach t und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{At}=A e^{At}=e^{At} A \quad .$$

Beweis: Ist $A^k=(a_{ij})^k$ dann sind die Koeffizienten in e^{At} konvergente Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!}) a_{ij}^k t^k$ mit Konvergenzradius $R=\infty$. Diese Reihen sind gliedweise differenzierbar und die Ableitungen von der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{(k-1)!}) a_{ij}^k t^{(k-1)}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!}) a_{ij}^{(k+1)} t^k \quad .$$

Diese konvergieren wieder für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hieraus ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{k!}) A^{(k+1)} t^k=A e^{At} \quad .$$

Beweis (Funktionalgleichung):

Gilt AB=BA. Betrachten wir die Funktion $f(t)=e^{(A+B)t}-e^{At} B e^{Bt}$.
Mit der Produktregel und der Vertauschbarkeitseigenschaft gilt dann:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (A+B) e^{(A+B)t}-A e^{At} e^{Bt}-e^{At} B e^{Bt} \\ &= (A+B)(e^{(A+B)t}-e^{At} e^{Bt}) \\ &= (A+B) f(t) \end{aligned}$$

Daher ist f(t) eindeutig bestimmte Lösung von $Y'(t)=(A+B)Y(t)$ mit f(0)=0, also muss f(t)=0 sein für alle $t\in\mathbb{R}$, d.h.

$$e^{(A+B)t}=e^{At}e^{Bt}$$

Für t=1 ergibt sich dann die Aussage des Satzes.

3.2 exp(A) als Basis des Vektorraums von Differentialgleichungssystemen

Theorem: Sei $A\in Mat(n,\mathbb{R})\, oder\, \mathbb{C}$.
Dann bilden die Spalten der Matrix e^A eine Basis für den Vektorraum der Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$Y'(t)=Ay(t) \quad .$$

Beweis: Da die Zuordnung $t\rightarrow e^{At}$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}e^{At}=A\,e^{At}$ definiert, wurde oben gezeigt, dass die Differential - gleichung von den Spalten von A gelöst wird.
(Differenzieren und die Multiplikation wirken hierbei unabhängig auf die Spalten von e^{At} .)

Analog zu 2.1 zeigen wir nun, dass Y(t) eine Linearkombination der Spalten von A ist und das System löst.

Sei also Y(t) eine beliebige Lösung.
Betrachten wir nun $e^{-At}y(t)$. Differenzieren nach t ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-At}y(t))=-A e^{-At}y(t)+e^{-At}y(t) \quad .$$

Da A, e^{At} kommutativ sind, ist $\frac{\partial}{\partial t}(e^{-At}y(t))=0$ und somit konstant.

Setze also $\frac{\partial}{\partial t}(e^{-At}y(t))=\begin{pmatrix}c_1\\ :\\ c_n\end{pmatrix}=c$.

Hieraus ergibt sich $y(t)=e^{At}c$ also Linearkombination der Spalten von e^{At} .

Es wurde also gezeigt, dass die Exponentialabbildung für Matrizen die Lösung eines Differentialgleichungssystems liefert.
Wenn A diagonalisierbar ist, ist dieses auch leicht anzugeben, da

$e^A=S^{-1}e^{\tilde{A}}S$ gilt, mit $\tilde{A}$ gleich der Diagonalform von A.

Beispiel: Sei $A=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, dann ist $\tilde{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

hieraus ergibt sich: $e^{t\tilde{A}}=\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}$

Daraus folgt wieder:

$$\begin{aligned} e^{tA}=S^{-1}e^{t\tilde{A}}S &= \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2e^{2t} & 3e^{t}\\ e^{2t} & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2e^{2t}+3e^{t} & 6e^{2t}-6e^{t}\\ -e^{2t}+e^{t} & 3e^{2t}-2e^{t}\end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Die Spalten von e^{tA} bilden nun eine Basis der allgemeinen Lösung des Differentialgleichungssystems.

Abschließend bleibt noch zu erwähnen, dass bei nicht diagonalisierbaren Matrizen das Exponential einer Matrix nicht mit dieser Methode ermittelt werden kann, hierfür benötigt man die Jordansche Normalform.

Literatur:

M. Artin *Algebra*, Birkhäuser, 1998
G. Fischer *Lineare Algebra*, Vieweg+Teubner, 2008
R. Meise *Skript Analysis II.*, Mitschrift 2009