

Analysis II
Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie e^A für die folgenden Matrizen: [5x2P]

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt [4P]

$$\exp(A) = \exp(a) \cdot \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, für die gilt: [6P]

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 2 - e & -1 + e \\ 2 - 2e & -1 + 2e \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu (a): $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems [10P]

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 4.

Sei L der Vektorraum aller Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie eine Basis von L . [5P]

(b) Sei $U := \{\varphi \in L \mid \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von L ist und bestimmen Sie die Dimension von U . [5P]