Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 25.06, 10:20 Uhr

Im Tutorium und in der Vorlesung wurden zwei Beispiele wie in Aufgabe 1 ausführlich besprochen. Aufgaben der Sorte 1 und 2 werden in der Klausur gegeben. Aufgabe 3 ist über Min/Max. Der Begriff "kontrahierende Abbildung" wird in Abschnitt 14 wichtig.

Analysis II
Übungsblatt 12

Aufgabe 1. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems [10P]

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} y.$$

Aufgabe 2.

(a) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y'' = 6y' - 9y.$$

[5P]

(b) Besitzt das Anfangswertproblem für $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, eine eindeutige Lösung? Wenn ja, geben Sie diese an. [5P]

Aufgabe 3. Bestimmen Sie den Abstand der Hyperbel [10P]

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

zur Geraden

$$G := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = 2u\}.$$

Hinweis. Der Abstand d wird durch $d := \inf\{||h - g||_2 \ \mid h \in H, g \in G\}$ definiert.

Aufgabe 4. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) := x^3$. [10P]
Finden Sie eine Zahl $a > 0$, die die folgenden Eigenschaften gleichzeitig erfüllt:

(a) Für $|x| \leqslant a$ ist $|f(x)| \leqslant a$.

(b) Die Funktion f ist auf dem Intervall $(-a, a)$ nicht kontrahierend [1].

(c) Für jede Zahl b mit $0 < b < a$ ist f auf $[-b, b]$ kontrahierend.

[1] Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to X$ heißt *kontrahierend*, wenn es ein $q < 1$ gibt, so dass

$$d(f(x), f(y)) \leqslant q \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ gilt.