Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 30.04, 10:20 Uhr

Analysis II
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Berechnen Sie für die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen der Ordnung 1 und der Ordnung 2:

(a) $f(x, y) = xe^{xy^2}$ [6P]

(b) $f(x, y) = \sin(x - y^2)$. [6P]

Hinweis. Alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung 1 sind $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.
Alle partiellen Ableitungen von f der Ordnung 2 sind $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$.

Aufgabe 2. Wir definieren eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 x_2 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie die Funktionen $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf, für die $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ ist. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\mathbf{Df}(x)$ für $x \in \mathbb{R}^2$. [4P]

(b) Es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ fest. Wir definieren eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\varphi(\zeta) := f(x + \zeta) - f(x) - \mathbf{Df}(x) \cdot \zeta.$$

Hier ist $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Berechnen Sie $\varphi(\zeta)$. [5P]

(c) Beweisen Sie direkt[1]: [7P]

$$\lim_{\substack{\zeta \to \mathbf{0} \\ \zeta \neq \mathbf{0}}} \frac{||\varphi(\zeta)||}{||\zeta||} = 0.$$

Hinweis zu (c). Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, können Sie die Norm $||\cdot||_\infty$ benutzen.

Fortsetzung Seite 2.

[1]direkt = ohne Verweisung auf einen Satz im Skript.

Aufgabe 3. Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \min\{x_1, x_2\}$.

(a) Beweisen Sie, dass f im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ partiell differenzierbar ist und berechnen Sie die partiellen Ableitungen im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. [6P]

(b) Beweisen Sie, dass f im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht partiell differenzierbar ist. [6P]