Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 7.05, 10:20 Uhr

.

Analysis II
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Wir definieren eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

und eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$g(x) = \begin{pmatrix} \sin x_2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie die Kettenregel: [10P]

$$\mathbf{Dh}(x) = \mathbf{Dg}(f(x)) \cdot \mathbf{Df}(x).$$

Aufgabe 2. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$f(x, y) := \cos(x) \cdot e^y.$$

(a) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\mathbf{D}_\nu \mathbf{f}(x, y)$ für $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, 2)$, $\nu = (\sqrt{3}, 1)$. [3P]

(b) Berechnen Sie das Maximum von $\mathbf{D}_{\nu(\theta)} \mathbf{f}(x, y)$, wobei $(x, y) = (\frac{\pi}{3}, 2)$ und $\nu(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ ist und θ über $[0, 2\pi)$ läuft. [5P]

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. [3P]

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. [4P]

(c) Beweisen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ ist. [6P]

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion der Klasse C^1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über $\mathbb{R}$. Wir definieren $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $\mathbf{g}(X) = f(AX)$, wobei $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist. Drücken Sie $\nabla \mathbf{g}(X)$ durch partielle Ableitungen von f aus. [9P]