Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 21.05, 10:20 Uhr

# Analysis II
## Übungsblatt 7

**Aufgabe 1.** Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) := x^{\mathbf{3}} + xy + \frac{1}{2}y^2 + x + y + 1.$$

(a) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von $f$. [3P]

(b) Bestimmen Sie die Sattelpunkte und die Stellen der lokalen Extrema von $f$. In jedem Fall entscheiden Sie, ob es sich um ein striktes lokales Maximum oder ein striktes lokales Minimum handelt. [6P]

**Aufgabe 2.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)}.$$

(a) Berechnen Sie die Stellen der lokalen Extrema von $f$. In jedem Fall entscheiden Sie, ob es sich um ein striktes lokales Maximum oder ein striktes lokales Minimum handelt. Finden Sie die Stellen des globalen Maximums und globalen Minimums von $f$. [8P]

(b) Beweisen Sie, dass $f$ nicht der Klasse $C^1$ ist. [4P]

(c) Finden Sie eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Klasse $C^1$ mit denselben Stellen des lokalen Maximums und lokalen Minimums, wie bei $f$. [4P]

**Aufgabe 3.** Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch [9P]

$$f(x,y) := x^2 + xy + y^2 + x + y + 1.$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von $f$ auf der Menge

$$Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ ||(x,y)||_\infty \leqslant 1\}.$$

**Aufgabe 4.** Sei $(X,d)$ ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Beweisen Sie:

(a) Ist $A$ kompakt und $B$ abgeschlossen, so ist $A \cap B$ kompakt. [3P]

(b) Sind $A$ und $B$ kompakt, so ist $A \cup B$ kompakt. [3P]