Musterlösung Blatt 10

Aufgabe 1 Gesucht: Alle Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cos(x), \\ y_2' = y_1 e^{-\sin(x)}. \end{cases}$$

Wie lösen zunächst für die erste Komponente

$$y_1' = y_1 \cos(x)$$

Die Funktion $y_1 = 0$ löst offensichtlich diese Differentialgleichung. Finden wir weitere Lösungen y_1 dieser Differentialgleichung, so existieren ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $y_1(x_0) = y_0$. Wir betrachten zunächst den Fall $y_0 \neq 0$ und lösen

$$y_1' = y_1 \cos(x) \quad \text{mit } y_1(x_0) = y_0.$$

mit Hilfe der Methode der getrennten Variablen auf $U = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ bzw. auf $U = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$. Dafür seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos(x)$ und $g(y_1) = y_1$. Wähle dabei $J = (0, \infty)$, für Anfangsbedingung $y_1(x_0) = y_0 \in (0, \infty)$ oder $J = (-\infty, 0)$, für Anfangsbedingung $y_1(x_0) = y_0 \in (-\infty, 0)$. Dann sind f, g stetige Funktionen mit $g(y_1) \neq 0$ für alle $y_1 \in J$ und es gilt

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \cos(t) dt = [\sin(t)]_{x_0}^x = \sin(x) - \sin(x_0)$$

und

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds = \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = [\ln(|s|)]_{y_0}^y = \ln(|y|) - \ln(|y_0|)$$

für $G : J \rightarrow \mathbb{R}$. Wir erhalten die Umkehrfunktion $G^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow J$ durch

$$G^{-1}(z) = \begin{cases} e^z e^{y_0} & \text{falls } J = (0, \infty) \\ -e^z e^{-y_0} & \text{falls } J = (-\infty, 0). \end{cases}$$

Die Lösung $\phi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann gegeben durch

$$\phi_1(x) = G^{-1}(F(x)) = \pm e^{\sin(x) - \sin(x_0)} e^{\pm y_0}.$$

Wir haben nun alle Lösungen gefunden, für die entweder $y_1 > 0$, $y_1 < 0$ oder $y_1 = 0$ gilt. Wir zeigen noch, dass keine weitere Lösung existieren kann. Angenommen es existiert eine Lösung $\tilde{y}_1$ der Differentialgleichung mit $\tilde{y}_1(x_1) = 0$ für ein $x_1 \in \mathbb{R}$ und $\tilde{y}_1 \neq 0$. Dann entspricht die Lösung nicht unserer oben gefunden Lösung. Da $\tilde{y}_1$ jedoch nicht die Nullfunktion ist, existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{y}_1(x_0) = y_0 \neq 0$. Die Differentialgleichung

$$y_1' = y_1 \cos(x) \quad \text{mit } y_1(x_0) = y_0.$$

wird also sowohl von $\tilde{y}_1$ gelöst als auch von der oben gefundenen Lösung. Die Funktion $f : \mathbb{R} \times J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = y \cos(x)$ ist aber offensichtlich stetig und Lipschitz-stetig im 2. Argument (es gilt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\cos(x)(y_1 - y_2)| = |\cos(x)||y_1 - y_2| \leq 1|y_1 - y_2|$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$). Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert also eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems im Widerspruch zu unserer Annahme.

Alle Lösungen von

$$y_1' = y_1 \cos(x)$$

sind also von der Form $y_1(x) = C_1 e^{\sin(x)}$ für ein $C_1 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$y_2'(x) = y_1(x) e^{-\sin(x)} = C_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und somit muss $y_2(x) = C_1 x + C_2$ für ein $C_2 \in \mathbb{R}$ gelten. Alle Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung sind somit von der Form

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\sin(x)} \\ C_1 x + C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{\sin(x)} \\ x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Man kann auch ein Fundamentalsystem raten, und dann mit Hilfe der Wronski-Determinante nachweisen, dass es sich tatsächlich um ein Fundamentalsystem handelt.

Aufgabe 2 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = A(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & 1 \\ 0 & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

und lösen zunächst

$$y_2' = \frac{3}{x} y_2.$$

Die Funktion $y_2 = 0$ löst offensichtlich diese Differentialgleichung. Finden wir weitere Lösungen y_2 dieser Differentialgleichung, so existieren ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $y_2(x_0) = y_0$. Wir betrachten zunächst den Fall $y_0 \neq 0$, d.h.

$$y_2' = \frac{3}{x} y_2 \quad \text{mit } y_2(x_0) = y_0$$

mit der Methode der getrennten Variablen. Definiere dafür $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{3}{x}$ und $g : J \rightarrow J$ durch $g(y) = y$. Dabei sei $J = (0, \infty)$ oder $J = (-\infty, 0)$, je nachdem, in welchem der Intervalle die Anfangsbedingung liegt. Dann sind g und f stetig und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Mit

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{3}{t} dt = 3 \ln(x) - 3 \ln(x_0)$$

und

$$G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(s)} ds = \int_{y_0}^y \frac{1}{s} ds = \ln(|y|) - \ln(|y_0|)$$

sowie $G^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow J$ mit $G^{-1}(z) = \pm e^z e^{\pm y_0}$ (siehe oben) erhalten wir die Lösung

$$\phi_2(x) = G^{-1}(F(x)) = \pm \frac{x^3}{x_0^3} e^{\pm y_0}.$$

Wir haben nun alle Lösungen gefunden, für die entweder $y_2(x) > 0$, $y_2(x) < 0$ oder $y_2(x) = 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ gilt. Wir zeigen noch, dass keine weitere Lösung existieren kann. Angenommen es existiert eine Lösung $\tilde{y}_2$ der Differentialgleichung mit $\tilde{y}_2(x_1) = 0$ für ein $x_1 \in (0, \infty)$ und $\tilde{y}_2 \neq 0$. Dann entspricht die Lösung nicht unserer oben gefundenen Lösung. Da $\tilde{y}_2$ jedoch nicht die Nullfunktion ist, existiert ein $x_0 \in (0, \infty)$ mit $\tilde{y}_2(x_0) = y_0 \neq 0$. Die Differentialgleichung

$$y_2' = \frac{3}{x} y_2 \quad \text{mit } y_2(x_0) = y_0$$

wird also sowohl von $\tilde{y}_2$ gelöst als auch von der oben gefundenen Lösung. Die Funktion $f : (0, \infty) \times J \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{3}{x} y$ ist aber offensichtlich stetig und da sie stetig partiell differenzierbar ist, ist sie auch lokal Lipschitz-stetig (Bemerkung 11.10). Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert also eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems im Widerspruch zu unserer Annahme.

Alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y_2' = \frac{3}{x} y_2$$

sind also von der Form $y_2(x) = C_1 x^3$ für ein $C_1 \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$y_1'(x) = \frac{2}{x} y_1(x) + y_2(x) = \frac{2}{x} y_1(x) + C_1 x^3.$$

Wir lösen diese Gleichung mit Hilfe von Satz 11.17. Definiere dafür $a, b : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $a(x) = \frac{2}{x}$ und $b(x) = C_1 x^3$. Dann sind a, b stetige Funktionen und mit

$$\phi_1(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) = \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{2}{t} dt\right) = \exp(2 \ln(x) - 2 \ln(x_0)) = \frac{x^2}{x_0^2}$$

ist die Lösung $\psi_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\psi_1(x) = \phi_1(x) \left(y_0 + \int_{x_0}^x \frac{b(t)}{\phi_1(t)} dt \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2}{x_0^2} \left(y_0 + \int_{x_0}^x C_1 x_0^2 \frac{t^3}{t^2} dt \right) \\
 &= \frac{x^2}{x_0^2} \left(y_0 + C_1 x_0^2 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{x_0}^x \right) \\
 &= x^2 \frac{y_0}{x_0^2} + \frac{1}{2} C_1 x^2 (x^2 - x_0^2) \\
 &= \frac{1}{2} C_1 x^4 + x^2 \left(\frac{y_0}{x_0^2} - \frac{1}{2} C_1 x_0^2 \right).
 \end{aligned}$$

Also sind alle Lösungen von der Form

$$y_1(x) = \frac{1}{2} C_1 x^4 + C_2 x^2$$

für ein $C_2 \in \mathbb{R}$. Um ein Fundamentalsystem zu erhalten, welches die gegebenen Anfangsbedingungen erfüllt, definiere $C_3 := C_2 + \frac{C_1}{2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} C_1 x^4 + (C_3 - \frac{C_1}{2}) x^2 \\ C_1 x^3 \end{pmatrix} \\
 &= C_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}}_{=: \Phi_2(x)} + C_3 \underbrace{\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \Phi_1(x)}
 \end{aligned}$$

und die so definierten Funktionen Φ_1 und Φ_2 erfüllen

$$\Phi_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Zz: Die Abbildung $\|A\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ist eine Norm auf $M(n, n, \mathbb{R})$. Für jedes $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ gilt

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n \underbrace{a_{i,j}^2}_{\geq 0} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

und

$$\begin{aligned}
 \|A\|_F = 0 &\Leftrightarrow a_{i,j} = 0 \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n \\
 &\Leftrightarrow A = 0 \text{ (Nullmatrix)}.
 \end{aligned}$$

Für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$ gilt weiterhin

$$\|\alpha A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n (\alpha a_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|A\|_F$$

sowie

$$\|A + B\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{i,j} + b_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|a + b\|_2 \leq \|a\|_2 + \|b\|_2 = \|A\|_F + \|B\|_F$$

wobei die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^{n^2}$ gegeben sind durch

$$a = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n} \end{pmatrix}$$

und die Ungleichung aus der Dreiecksungleichung für die 2-Norm folgt.

(b) Zz: Für $n \geq 2$ existiert keine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass

$$\|A\|_F = \max\{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \leq 1\}$$

für alle $A \in M(n, n, \mathbb{R})$. Wähle beispielsweise die Einheitsmatrix $I_n \in M(n, n, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\|I_n\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n ((I_n)_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

aber

$$\max\{\|I_n x\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \leq 1\} = \max\{\|x\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \leq 1\} = 1$$

für jede Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Für $n \geq 2$ gilt daher stets

$$\sqrt{n} = \|I_n\|_F > \max\{\|I_n x\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \leq 1\} = 1$$

und die Behauptung ist gezeigt.

Aufgabe 4 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

(a) Seien A, B kompakt. Zz: $A + B$ ist kompakt.

Wir zeigen Kompaktheit mithilfe der Definition. Sei dazu $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $A + B$. Dann lässt sich $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zerlegen in $c_n = a_n + b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wobei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$. Da A kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $a \in A$. Wir betrachten nun die Folge $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B$. Da B kompakt ist, besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge $(b_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert $b \in B$. Dann gilt jedoch auch

$$\lim_{l \rightarrow \infty} c_{n_{k_l}} = \lim_{l \rightarrow \infty} (a_{n_{k_l}} + b_{n_{k_l}}) = a + b \in A + B,$$

und somit besitzt die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $a + b \in A + B$. Damit ist $A + B$ kompakt.

(b) Gesucht sind zwei abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$, so dass $A + B$ nicht abgeschlossen ist. Wähle $A = \mathbb{N}$ und $B = \{-n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Wir wissen bereits, dass A abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Um zu zeigen, dass B abgeschlossen ist, zeigen wir, dass das Komplement B^c offen ist. Es gilt

$$\begin{aligned} B^c &= \mathbb{R} \setminus \left\{ -n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{3}, \dots \right\} \\ &= \underbrace{(0, \infty)}_{\text{offen}} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-n + \frac{1}{n}, -(n+1) + \frac{1}{n+1} \right)}_{\text{offen}} \right) \end{aligned}$$

und somit ist B^c als Vereinigung offener Mengen wieder offen. Betrachte nun $A + B$. Es gilt:

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} = \left\{ m - n + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Wir zeigen, dass $A + B$ nicht abgeschlossen ist. Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}} \subset A + B$ konvergiert gegen 0 (wähle $m = n$ um zu sehen, dass die Folge in $A + B$ liegt). Allerdings ist $0 \notin A + B$, da für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{m - n}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n=1} = 0$$

nicht erfüllt werden kann. Somit ist $A + B$ nicht abgeschlossen.

Aufgabe 5 Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y + xe^x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = -1$ und $y'(0) = 1$.

Wir schreiben die Differentialgleichung zunächst in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung um. Setze dafür $y_1 = y$ und $y_2 = y'$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -xe^x \end{pmatrix}.$$

Wir suchen zunächst ein Fundamentalsystem für die Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dafür definieren wir

$$\begin{aligned} \phi^1(x) &= \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} \\ \phi^2(x) &= \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Bemerkung: Wie man ϕ^1 und ϕ^2 systematisch finden kann, wurde in der Vorlesung und im Tutorium gezeigt. Das System hier ist so einfach, dass wir uns den langen Weg ersparen können.)

Dann gilt

$$\begin{aligned} (\phi^1)'(x) &= \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi^1(x) \\ (\phi^2)'(x) &= \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \phi^2(x) \end{aligned}$$

und es handelt sich tatsächlich um ein Fundamentalsystem, da

$$\det \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe von Satz 12.20 können wir nun eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden. Diese ist gegeben durch

$$\Psi(x) = \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t)dt$$

wobei $\Phi(x) = (\phi^1(x), \phi^2(x))$ das Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung und $b(t)$ die Inhomogenität bezeichnet. Berechne also

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{\det(\Phi(x))} \begin{pmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-x} \\ e^x & -e^x \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t)dt &= \int_0^x \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -te^t \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} -t \\ te^{2t} \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Mit

$$\int_0^x (-t)dt = -\frac{1}{2}x^2$$

und

$$\int_0^x te^{2t}dt = \left[\frac{1}{2}te^{2t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}e^{2t}dt = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}$$

folgt

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t)dt &= \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} -t \\ te^{2t} \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -x^2 \\ xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Eine Lösung ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi^{-1}(t)b(t)dt \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x^2 \\ xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^x x^2 + xe^x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \\ -x^2 e^x - xe^x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung sind also von der Form

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= c_1 \phi^1(x) + c_2 \phi^2(x) + \Psi(x) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^x x^2 + xe^x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \\ -x^2 e^x - xe^x + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten soll, folgt betrachte

$$\begin{aligned}\Phi(0) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

erhalten wir $c_1 = 0$ und $c_2 = -1$. Damit ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung gegeben als

$$y(x) = -e^{-x} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^x x^2 + xe^x - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \end{pmatrix}.$$