Musterlösung Blatt 13

Aufgabe 1

(a) Aussage: Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(X, \mathbb{R})$ mit $\nabla f = 0$, so ist f konstant.
Diese Aussage ist falsch. (Begründung (nicht erforderlich): Wähle z.B. $X = (-2, -1) \cup (1, 2)$. Dann ist X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$. Ist nun $f = 1$ auf $(-2, -1)$ und $f = -1$ auf $(1, 2)$, so ist f auf X stetig differenzierbar mit $\nabla f = f' = 0$ aber f ist nicht konstant.)

(b) Aussage: Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $A \subset X$ genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt.
Diese Aussage stimmt. (Begründung (nicht erforderlich): Es gilt $A \cap \partial A = \emptyset$ genau dann wenn $A = A^\circ$, was wiederum äquivalent dazu ist, dass A offen ist.)

(c) Aussage: Jede kontrahierende Abbildung $f : [2, 3] \cup [4, 5] \to [2, 3] \cup [4, 5]$ besitzt einen Fixpunkt.
Diese Aussage stimmt. (Begründung (nicht erforderlich): Banachscher Fixpunktsatz)

(d) Aussage: Genau eine der nachstehenden Formeln definiert eine Norm auf $\mathbb{R}^3$

$$||x|| = x_1 + \sqrt[5]{|x_2|^5 + |x_3|^5}, ||x|| = \sqrt[3]{|x_1 x_2 x_3|}.$$

Diese Aussage ist falsch. (Begründung (nicht erforderlich): Beide Abbildungen stellen keine Norm da. Um dies für die erste Norm zu sehen, wähle z.B. $x = (-1, 0, 0)$. Dann ist $||x|| = -1 < 0$ und somit kann es sich nicht um eine Norm handeln. Für die zweite Abbildung, betrachte $x = (1, 0, 0)$. Dann gilt $||x|| = 0$ aber $x \neq 0$, sodass auch hier keine Norm vorliegt.)

Aufgabe 2 Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $p(x, y) = x$.

(a) Aussage: Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ offen, so ist $p(A)$ offen.
Diese Aussage ist wahr. Beweis:
Sei $x \in p(A)$. Wir zeigen, dass wir eine offene Umgebung von x finden können, die ganz in $p(A)$ enthalten ist. Da $x \in p(A)$ ist existiert ein $y \in \mathbb{R}$, so dass $(x, y) \in A$. Da A offen in $\mathbb{R}^2$ ist, existiert ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(x, y) \subset A$. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(A) \supseteq p(B_\epsilon(x, y)) &= p(\{(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 : ||(x_1, y_1) - (x, y)|| < \epsilon\}) \\ &\supseteq p(\{(x_1, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x_1, y) - (x, y)|| = |x_1 - x| < \epsilon\}) \\ &= (x - \epsilon, x + \epsilon). \end{aligned}$$

Somit ist $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ eine offene Umgebung von x, die ganz in $p(A)$ enthalten ist und da x beliebig gewählt war folgt, dass $p(A)$ offen ist.

(b) Aussage: Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, so ist $p(A)$ abgeschlossen.
Diese Aussage ist falsch. Beweis:
Betrachte beispielsweise die Menge $A := \{(\arctan(y), y) : y \in \mathbb{R}\}$. Da die Funktion arctan stetig auf $\mathbb{R}$ ist folgt, dass A eine abgschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ ist (siehe hierzu die Lösung von Aufgabe 3, Blatt 6). Allerdings gilt

$$p(A) = \{\arctan(y) : y \in \mathbb{R}\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

welches keine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(c) Aussage: Ist $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, so ist $p(A)$ kompakt.
Die Abbildung $p(x, y) = x$ ist stetig, da für jedes $\epsilon > 0$, $\delta = \epsilon$ und $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit

$$||(x_1, y_1) - (x_2, y_2)||_{\max} = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} < \delta$$

(wir können die Norm auf $\mathbb{R}^2$ frei wählen, da alle Normen äquivalent sind), gilt

$$|p(x_1, y_1) - p(x_2, y_2)| = |x_1 - x_2| < \delta = \epsilon.$$

Dann folgt die Aussage direkt aus Satz 4.6.

Aufgabe 3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^3 - xy + y^2$. Wir suchen die kritischen Stellen. Dafür betrachten wir

$$\begin{aligned} grad f(x,y) = \left(3x^2 - y, -x + 2y\right) &\overset{!}{=} (0,0) \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y &= 3x^2 \\ x &= 2y \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y &= 3x^2 \\ x &= 6x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} y &= 3x^2 \\ x &= 0 \text{ oder } x = \frac{1}{6}. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erhalten also die kritischen Stellen $(x_1, y_1) = (0,0)$ und $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$. Um zu entscheiden, ob es sich um Maxima/Minima handelt, bestimmen wir die Hesse-Matrix. Es gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und somit erhalten wir für die erste kritische Stelle

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $det(H_f(0,0)) = -1 < 0$ ist, folgt mit dem Kriterium von Hurwitz, dass die Hesse-Matrix in diesem Punkt indefinit ist und somit in diesem Punkt kein lokales Extremum vorliegt. Weiterhin gilt

$$H_f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $det\left(H_f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)\right) = 2 - 1 = 1 > 0$ ist und $\Delta_1 = 1 > 0$ folgt mit dem Kriterium von Hurwitz, dass die Matrix positiv definit ist und somit im Punkt $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$ ein lokales Minimum vorliegt.

Aufgabe 4 Sei $f : [0,3] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} x\cos(2x) \\ x\sin(2x) \\ \frac{2}{3}x^3 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Weglänge von f. Da f stetig differenzierbar ist, gilt

$$L(f) = \int_0^3 ||f'(t)||_2 dt.$$

Wir berechnen daher zunächst die Ableitung

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) - 2x\sin(2x) \\ \sin(2x) + 2x\cos(2x) \\ 2x^2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} ||f'(x)||_2 &= \sqrt{(\cos(2x) - 2x\sin(2x))^2 + (\sin(2x) + 2x\cos(2x))^2 + 4x^4} \\ &= \sqrt{\cos(2x)^2 - 4x\cos(2x)\sin(2x) + 4x^2\sin(2x)^2 + \sin(2x)^2 + 4x\sin(2x)\cos(2x) + 4x^2\cos(2x)^2 + 4x^4} \\ &= \sqrt{1 + 4x^2\sin(2x)^2 + 4x^2\cos(2x)^2 + 4x^4} \\ &= \sqrt{1 + 4x^2(\sin(2x)^2 + \cos(2x)^2) + 4x^4} \\ &= \sqrt{1 + 4x^2 + 4x^4} \\ &= \sqrt{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$$= 2x^2 + 1.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^3 ||f'(t)||_2 dt \\ &= \int_0^3 (2t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + t\right]_0^3 \\ &= 18 + 3 - 0 = 21. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Wir suchen reelle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Wir verwenden Satz 13.30. Danach ist das charakteristische Polynom gegeben durch

$$\chi(x) = x^2 - 4 + 5.$$

Da

$$\chi(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 5} = 2 \pm i$$

sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms komplex und nach Satz 13.30 bilden die Funktionen

$$\phi^1(x) = e^{2x}\cos(x) \quad \phi^2(x) = e^{2x}\sin(x)$$

ein Fundamentalsystem.

(b) Wir suchen reelle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 5y - e^x = 0.$$

Wir haben die Lösung der homogenen Gleichung bereits in Teil (a) berechnet, so dass es ausreichend ist eine Lösung ψ der inhomogenen Gleichung zu finden. Dann sind alle Lösungen von der Form

$$\Phi(x) = C_1\phi^1(x) + C_2\phi^2(x) + \psi(x)$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Um eine Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, verwenden wir den Ansatz aus Bemerkung 13.31. Wir setzen also

$$\psi(x) = ae^x.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= ae^x \\ \psi''(x) &= ae^x. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \psi''(x) - 4\psi'(x) + 5\psi(x) - e^x &= 2ae^x - e^x \\ &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Also erfüllt

$$\psi(x) = \frac{1}{2}e^x$$

die inhomogene Differentialgleichung. Alle Lösung sind daher von der Form

$$\Phi(x) = C_1e^{2x}\cos(x) + C_2e^{2x}\sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.