Musterlösung Blatt 7

Aufgabe 1 Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = x^3 + xy + \frac{1}{2}y^2 + x + y + 1.$$

(a) Gesucht: Krititsche Stellen von f

Die kritischen Stellen entsprechen den Nullstellen des Gradienten. Wir betrachten daher

$$\begin{aligned}\triangledown f(x,y) =& (3x^2 + y + 1, x + y + 1) \overset{!}{=} (0,0)\\ \Leftrightarrow& \begin{cases} 3x^2 + y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}\\ \Leftrightarrow& \begin{cases} 3x^2 + y + 1 = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}\\ \Leftrightarrow& \begin{cases} 3x^2 - x = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}\\ \Leftrightarrow& \begin{cases} x(3x-1) = 0 \\ y = -1 - x \end{cases}\end{aligned}$$

und erhalten die kritischen Stellen $(x_1, y_1) = (0, -1)$ und $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

(b) Wir bestimmen für die gefunden krititschen Stellen, ob es sich um (strikte) lokale Maxima/Minima oder um Sattelpunkte handelt. Dazu bestimmen wir die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(x_1, y_1) = (0, -1)$ ist mit

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Determinante $\Delta_2 = det(H_f(0,-1)) = -1 < 0$ und die Matix nach dem Hurwitz-Kriterium indefinit. Nach Satz 9.8. besitzt f somit in diesem Punkt kein Extremum sondern einen Sattelpunkt. Im Punkt $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ ist dagegen

$$H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= 2 > 0\\ \Delta_2 &= det\left(H_f\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)\right) = 2 - 1 = 1 > 0\end{aligned}$$

ist die Matrix in diesem Punkt positiv definit nach dem Hurwitz-Kriterium. Nach Satz 9.8. liegt im Punkt $(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ daher ein striktes lokales Minimum vor.

Aufgabe 2 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)}.$$

(a) Gesucht: Lokale und globale Extrema

Im Punkt $(0,0)$ ist die Funktion nicht partiell differenzierbar (siehe Teil b)) und daher untersuchen wir diesen Punkt zunächst gesondert:

Da

$$f(x,y) = \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-(x^2+y^2)}}_{>0} > 0 \quad \forall\, (x,y) \neq (0,0)$$

und $f(0,0) = 0$ gilt, liegt im Punkt $(0,0)$ ein striktes globales Minimum vor.
Wir bestimmen außerhalb des Punktes $(0,0)$ die kritischen Stellen als Nullstellen des Gradienten:

$$\begin{aligned}
\triangledown f(x,y) &= \left(\frac{xe^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - 2x\sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)}, \frac{ye^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - 2y\sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) \\
&\overset{!}{=}(0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{xe^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - 2x\sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0 \\ \frac{ye^{-(x^2+y^2)}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} - 2y\sqrt{x^2+y^2} \cdot e^{-(x^2+y^2)} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x(x^2+y^2) = 0 \\ y - 2y(x^2+y^2) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ oder } 1 - 2(x^2+y^2) = 0 \\ y - 2y(x^2+y^2) = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Wir erhalten dadurch die Menge K der krititschen Punkte als

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \right\} = \partial B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}((0,0)).$$

Die Punkte der Menge K liegen also auf dem Rand des Kreises um den Nullpunkt mit Radius $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Weiterhin stellen wir fest, dass für jeden Radius $r > 0$ die Funktionswerte auf dem Kreisrand $\partial Br((0,0))$ konstant sind. Falls es sich bei diesen Punkten um Extrema handeln sollte, so liegt das Extremum auf dem ganzen Kreisrand vor und somit kann es sich dabei nicht um strikte Extrema handeln. Eine Betrachtung der Hesse-Matrix ist daher nicht zielführend. Stattdessen setzen wir $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und betrachten die Funktion $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit

$$g(r) = re^{-r^2}$$

und untersuchen diese auf Extrema. Dafür betrachte

$$\begin{aligned}
g'(r) &= e^{-r^2} - 2r^2e^{-r^2} \overset{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - 2r^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad (\text{ da } r > 0).
\end{aligned}$$

Somit ist die einizige kritische Stelle von g der Punkt $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Wegen

$$g'(r) = e^{-r^2}(1 - 2r^2) > 0 \quad \forall\, 0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist g auf $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ streng monoton steigend und auf $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$ wegen

$$g'(r) = e^{-r^2}(1 - 2r^2) < 0 \quad \forall\, r > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

streng monoton fallend. Damit besitzt g ein striktes globales Maximum im Punkt $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Die ursprüngliche Funktion f mit $f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ besitzt daher globale Maxima in jedem Punkt der Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$, also in jedem Punkt des Kreisrands $\partial B_{\frac{1}{\sqrt{2}}}((0,0))$.
Alternative Lösung: Sie können die Funktion auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ auch in Polarkoordinaten untersuchen.

(b) Zz: $f \notin C^1$.
Wir zeigen, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht partiell differenzierbar bezüglich x ist. Es gilt

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{he^{-h^2}}{h} = 1$$

aber

$$\lim_{h\uparrow 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\uparrow 0}\frac{|h|e^{-h^2}}{h}=-1.$$

Da die Grenzwerte nicht übereinstimmen ist f nicht partiell differenzierbar im Punkt $(0,0)$.

(c) Wir wählen $g(x,y)=f(x,y)^2=(x^2+y^2)e^{-2(x^2+y^2)}$. Da f auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ strikt positiv ist, nimmt g an den selben Stellen wie f das Maximum an und wegen

$$g(0,0)=0<g(x,y)\quad\forall(x,y)\neq(0,0)$$

besitzt g auch das selbe Minimum. Bleibt zu zeigen, dass $g\in C^1$ gilt. Wir stellen zunächst fest, dass g als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Weiterhin ist

$$\triangledown g(x,y)=\left(e^{-2(x^2+y^2)}(2x-4x(x^2+y^2)),e^{-2(x^2+y^2)}(2y-4y(x^2+y^2))\right)$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ und somit ist g partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind ebenfalls stetig als Komposition stetiger Funktionen und somit erhalten wir $g\in C^1$.

Aufgabe 3 Wir definieren $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ durch

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+x+y+1$$

und suchen das Maximum/Minmum von f auf der Menge

$$Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:||(x,y)||_\infty\leq 1\}.$$

Dazu berechnen wir zunächst die kritischen Stellen:

$$\begin{aligned}\triangledown f(x,y)=&(2x+y+1,2y+x+1)\overset{!}{=}(0,0)\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}2x+y+1=0\\2y+x+1=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}2x+y+1=0\\x=-1-2y\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}-2-4y+y+1=0\\x=-1-2y\end{cases}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}y=-\frac{1}{3}\\x=-\frac{1}{3}.\end{cases}\end{aligned}$$

Da $||\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)||_\infty=\frac{1}{3}<1$, ist der kritische Punkt $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ in der Menge Q enthalten. Weiterhin ist

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

wegen

$$\begin{aligned}\Delta_1&=2>\\ \Delta_2&=4-1=3>0\end{aligned}$$

für jedes $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ positiv definit nach dem Kriterium von Hurwitz und somit liegt im Punkt $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ ein Minimum vor.
Wir müssen nun noch den Rand von Q überprüfen. Dazu unterscheiden wir vier Fälle:
<u>1. Fall:</u> $x=1$ und $y\in[-1,1]$.
Für $x=1$ erhalten wir die Funktion $f_1:[-1,1]\to\mathbb{R}$ mit $f_1(y):=f(1,y)=3+2y+y^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}f_1'(y)=&2y+2\overset{!}{=}0\\ \Leftrightarrow& y=-1\end{aligned}$$

und wegen

$$f_1''(y) = 2 > 0 \quad \forall\, y \in [-1, 1]$$

handelt es sich bei diesem Punkt um ein lokales Minimum der Funktion f_1. Da f_1 wegen

$$f_1'(y) = 2y + 2 > 0 \quad \forall\, y \in (-1, 1]$$

streng monoton steigend ist, nimmt f_1 ein Maximum im Punkt $y = 1$ an.
2. Fall: $x = -1$ und $y \in [-1, 1]$.
Für $x = -1$ erhalten wir die Funktion $f_2 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(y) := f(-1, y) = y^2 + 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} f_2'(y) =& 2y \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow & y = 0 \end{aligned}$$

und wegen

$$f_2''(y) = 2 > 0 \quad \forall\, y \in [-1, 1]$$

handelt es sich bei diesem Punkt um ein lokales Minimum der Funktion f_2. Die Funktion f_2 ist auf $[-1, 0)$ streng monoton fallend und auf $(0, 1]$ streng monoton wachsend, sodass das globale Minimum in 0 angenommen wird, während wegen $f_2(1) = 2 = f_2(-1)$ in diesen Punkten das Maximum der Funktion angenommen wird.
3. Fall: $y = 1$ und $x \in [-1, 1]$.
Da die Funktion f symmetrisch in x und y ist, nimmt die Funktion $f_3(x) := f(x, 1)$ analog zum ersten Fall ihr Maximum in $x = 1$ und ihr Minimum in $x = -1$ an.
4. Fall: $y = -1$ und $x \in [-1, 1]$.
Da die Funktion f symmetrisch in x und y ist, nimmt die Funktion $f_4(x) := f(x, -1)$ analog zum zweiten Fall ihr Maximum in den Punkten $x = 1$ und $x = -1$ sowie ihr Minimum in $x = 0$ an.
Da die Menge Q kompakt ist, nimmt f sowohl ein Maximum als auch ein Minimum an, sodass wir zur Ermittlung ebendessen die Funktionswerte an allen möglichen Punkten vergleichen können:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3} \\ f(1, -1) &= 2 \\ f(1, 1) &= 6 \\ f(-1, 0) &= 1 \\ f(-1, 1) &= 2 \\ f(-1, -1) &= 2 \\ f(0, -1) &= 1 \end{aligned}$$

Somit wird das Maximum im Punkt $(1, 1)$ und das Minimum im Punkt $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ angenommen.
Alternative Lösung: Sie können die Aufgabe ebenfalls lösen, indem Sie für jedes feste $t \in [-1, 1]$ die Funktion $f_t : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ durch $f_t(x) := f(t, y)$ definieren und diese zunäschst auf Extrma untersuchen. Indem Sie anschließend $t \in [-1, 1]$ variieren, finden Sie die obigen Extrma der Funktion f.

Aufgabe 4 Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$.

(a) Sei A kompakt und B abgeschlossen. Zz: $A \cap B$ ist kompakt.
Wir zeigen die Kompaktheit anhand der Definition. Sei daher $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \cap B$. Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere eine Folge in A und da A kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert x wieder in A liegt. Da die Teilfolge ebenfalls in B enthalten ist und B abgeschlossen ist, folgt auch $x \in B$. Somit besitzt jede Folge in $A \cap B$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $A \cap B$ und somit ist $A \cap B$ kompakt.

(b) Seien A und B kompakt. Zz: $A \cup B$ ist kompakt.
Wir zeigen wieder Kompaktheit mit der Definition. Sei also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $A \cup B$. Dann existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die entweder ganz in A oder in B enthalten ist. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Da A kompakt ist, existiert eine weitere Teilfolge $(x_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in A$ konvergiert. Da diese Folge und auch der Grenzwert damit auch in $A \cup B$ enthalten sind folgt die Behauptung.