Musterlösung

Aufgabe 1 (4 Punkte) Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
(a) Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen sind offen.	☒	☐
(b) Partiiell differenzierbare Funktionen sind stetig.	☐	☒
(c) Seien d_1, d_2 zwei äquivalente Metriken auf einer nicht-leeren Menge X und sei $A \subset X$. Existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A , sodass $d_1(x_n, x) \rightarrow 0$ für ein $x \in X$, so existiert auch eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A , die bezüglich d_2 gegen x konvergiert.	☒	☐
(d) Jede C^1 -Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.	☒	☐

Je ein Punkt pro richtiger Antwort.

Aufgabe 2 (8 Punkte) Wir definieren $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x \\ 2x^{3/2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Weglänge von f .

Lösung:

Da f stetig differenzierbar ist, gilt

$$L(f) = \int_0^3 \|f'(t)\|_2 dt.$$

Wir berechnen daher

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3x^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\|f'(x)\|_2 = \sqrt{3^2 + (3x^{\frac{1}{2}})^2} = 3\sqrt{1+x}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_0^3 \|f'(t)\|_2 dt \\ &= \int_0^3 3\sqrt{1+x} dt \\ &= 3 \left[\frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\ &= 2(4^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6+8 Punkte)

Wir definieren $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = 4x^3 - 3xy^2 - 12y$.

- (a) **(6P)** Bestimmen Sie kritische Stellen und lokale Maxima und Minima von f , wenn sie existieren.
(b) **(8P)** Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.

Lösung:

- (a) Zur Bestimmung der kritischen Stellen berechnen wir die Nullstellen des Gradienten

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} f(x, y) &= (12x^2 - 3y^2, -6xy - 12) \stackrel{!}{=} (0, 0) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 &= 3y^2 \\ 6xy &= -12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 &= y^2 \\ xy &= -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ist $xy = -2$, so muss $y \neq 0$ gelten, sodass wir durch y teilen dürfen, d.h. $x = -\frac{2}{y}$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir

$$4 \left(-\frac{2}{y} \right)^2 = y^2 \Leftrightarrow y^4 = 16.$$

Die reellen Lösungen dieser Gleichung sind $y_1 = 2$ und $y_2 = -2$. Wir erhalten also die kritischen Punkte $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ und $(x_2, y_2) = (1, -2)$. Um zu überprüfen, ob es sich bei den gefunden Stellen um lokale Extrema handelt, berechnen wir die Hesse-Matrix

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 24x & -6y \\ -6y & -6x \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$H_f(x_1, y_1) = H_f(-1, 2) = \begin{pmatrix} -24 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\det(H_f(x_1, y_1)) = \Delta_2 = -24 \cdot 6 - 12^2 < 0$$

folgt mit dem Kriterium von Hurwitz, dass die Matrix indefinit ist und somit in diesem Punkt kein lokales Extremum vorliegt. Im zweiten kritischen Punkt gilt

$$H_f(x_2, y_2) = H_f(1, -2) = \begin{pmatrix} 24 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\det(H_f(x_2, y_2)) = \Delta_2 = 24 \cdot (-6) - 12^2 < 0$$

ist die Matrix ebenfalls indefinit und es liegt kein lokales Extremum vor.

(b) Wir suchen nun das Maximum/Minimum der Funktion auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$. Wir haben in Teil (a) bereits festgestellt, dass im Inneren des Quadrats keine Extrema angenommen werden. Da das Quadrat allerdings eine kompakte Menge ist, muss ein Maximum/Minimum angenommen werden und somit genügt es, den Rand darauf zu untersuchen. Dazu betrachten wir die folgenden Fälle:

1. Fall: $x = 0, y \in [0, 1]$. Wir betrachten die Funktion $f_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(y) = f(0, y) = -12y$. Wegen $f_1'(y) = -12$ ist die Funktion monoton fallend und daher gilt

$$\begin{aligned}\max_{y \in [0, 1]} f_1(y) &= f_1(0) = 0 \\ \min_{y \in [0, 1]} f_1(y) &= f_1(1) = -12.\end{aligned}$$

2. Fall: $x = 1, y \in [0, 1]$. Wir betrachten die Funktion $f_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(y) = f(1, y) = 4 - 3y^2 - 12y$. Wegen

$$f_2'(y) = -6y - 12 < 0 \quad \forall y \in [0, 1]$$

ist die Funktion monoton fallend und daher gilt

$$\begin{aligned}\max_{y \in [0, 1]} f_2(y) &= f_2(0) = 4 \\ \min_{y \in [0, 1]} f_2(y) &= f_2(1) = -11.\end{aligned}$$

3. Fall: $y = 0, x \in [0, 1]$. Wir betrachten die Funktion $f_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = f(x, 0) = 4x^3$. Wegen

$$f_3'(x) = 12x^2 > 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ist die Funktion monoton steigend und daher gilt

$$\begin{aligned}\max_{x \in [0, 1]} f_3(x) &= f_3(1) = 4 \\ \min_{x \in [0, 1]} f_3(x) &= f_3(0) = 0.\end{aligned}$$

4. Fall: $y = 1, x \in [0, 1]$. Wir betrachten die Funktion $f_4 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = f(x, 1) = 4x^3 - 3x - 12$. Wegen

$$\begin{aligned}f_4'(x) &= 12x^2 - 3 \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}\end{aligned}$$

erhalten wir als kritische Stelle $x = \frac{1}{2}$. (Die zweite Stelle liegt nicht im Definitionsbereich von f_4). Wegen

$$\begin{aligned}f_4''(x) &= 24x \\ f_4''\left(\frac{1}{2}\right) &= 12\end{aligned}$$

handelt es sich bei diesem Punkt um ein Minimum. Daher gilt

$$\max_{y \in [0, 1]} f_4(y) = \max\{f_4(0), f_4(1)\} = \max\{-12, -11\} = -11$$

$$\min_{y \in [0,1]} f_4(y) = f_4\left(\frac{1}{2}\right) = -13.$$

Damit gilt insgesamt:

$$\max_{(x,y) \in [0,1]^2} f(x,y) = \max_{i=1\dots 4} \max_{x \in [0,1]} f_i(x) = 4$$

sowie

$$\min_{(x,y) \in [0,1]^2} f(x,y) = \min_{i=1\dots 4} \min_{x \in [0,1]} f_i(x) = -13.$$

Aufgabe 4 (4+8 Punkte) Es werden nur *reelle* Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der folgenden DGL gesucht.

(a) Geben Sie ein Fundamentalsystem der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

(b) Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Differentialgleichung an:

$$y'' - 2y' + 2y + (4 - 5x)e^{-x} = 0.$$

Lösung:

(a) Nach Satz 13.30. ist das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$\xi(x) = x^2 - 2x + 2.$$

Wegen

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i$$

ist nach Satz 13.30. ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$\phi^1(x) = e^x \cos(x), \quad \phi^2(x) = e^x \sin(x).$$

(b) Wir haben in Teil (a) bereits die Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung bestimmt. Daher genügt es, eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden. Dazu machen wir den Ansatz

$$\psi(x) = (ax + b)e^{-x}$$

(Vergleiche Bemerkung 13.31). Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= (a - ax - b)e^{-x} \\ \psi''(x) &= (ax + b - 2a)e^{-x} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \psi''(x) - 2\psi'(x) + 2\psi(x) &= e^{-x}(ax + b - 2a - 2a + 2ax + 2b + 2ax + 2b) \\ &= e^{-x}(5ax - 4a + 5b). \end{aligned}$$

Erfüllt nun ψ die inhomogene Differentialgleichung, so gilt

$$\begin{aligned} \psi''(x) - 2\psi'(x) + 2\psi(x) &= e^{-x}(5ax - 4a + 5b) \\ &\stackrel{!}{=} (5x - 4)e^{-x} \end{aligned}$$

und durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $a = 1$ und $b = 0$. Also ist $\psi(x) = xe^{-x}$ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Alle Lösungen sind daher von der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\phi^1(x) + C_2\phi^2(x) + \psi(x) \\ &= C_1e^x \cos(x) + C_2e^x \sin(x) + xe^{-x} \end{aligned}$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Geben Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung an:

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom von A :

$$\begin{aligned} \xi_A(x) &= \det(xId - A) = \det \begin{pmatrix} x+1 & -3 \\ 2 & x-4 \end{pmatrix} \\ &= (x+1)(x-4) + 6 \\ &= x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 2} \\ &\Leftrightarrow x_{1,2} = 1.5 \pm 0.5 \end{aligned}$$

folgt

$$\xi_A(x) = (x-1)(x-2).$$

Die algebraische und geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte beträgt daher 1.

1. Möglichkeit zur Berechnung der Lösung: Nach Satz 13.24. sind alle Lösungen von der Form

$$y(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{2x}$$

für Konstanten $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Zur Bestimmung der Konstanten setzen wir in die Differentialgleichung ein:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 2b_1 \\ 2b_2 \end{pmatrix} e^{2x} \\ &\stackrel{!}{=} Ay(x) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 e^x + b_1 e^{2x} \\ a_2 e^x + b_2 e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 e^x - b_1 e^{2x} + 3a_2 e^x + 3b_2 e^{2x} \\ -2a_1 e^x - 2b_1 e^{2x} + 4a_2 e^x + 4b_2 e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 + 3a_2 \\ -2a_1 + 4a_2 \end{pmatrix} e^x + \begin{pmatrix} 3b_2 - b_1 \\ 4b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} e^{2x}. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 &= -a_1 + 3a_2 \\ 2b_1 &= 3b_2 - b_1 \end{aligned}$$

und somit $a_1 = 1.5a_2$ und $b_1 = b_2$. Dann ist

$$y(x) = \frac{1}{2}a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^x + b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

und die Funktionen

$$\phi^1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^x, \quad \phi^2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}$$

bilden ein Fundamentalsystem.

2.Möglichkeit zur Berechnung der Lösung: Berechne zu jedem Eigenwert einen passenden Eigenvektor.
Für den Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ -2x + 4y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow 2x = 3y.$$

Daher ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 2$ gilt

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ -2x + 4y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow x = y.$$

Daher ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Dann ist ein Fundamentalsystem gegeben durch die Funktionen

$$\phi^1(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^x, \quad \phi^2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x}.$$

3.Möglichkeit zur Berechnung der Lösung: Da beide Eigenwerte algebraische und geometrische Vielfachheit 1 haben, ist die zugehörige Jordan-Matrix gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Beispiel 13.8.

$$e^{xJ} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsmatrix T besteht aus den Eigenvektor (siehe oben), dh.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$T^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} e^{xA} &= T e^{xJ} T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & -e^x \\ -2e^{2x} & 3e^{2x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3e^x - 4e^{2x} & -3e^x + 6e^{2x} \\ e^x - 2e^{2x} & -e^x + 3e^{2x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und in den Spalten dieser Matrix steht ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Bemerkung: Man muss T^{-1} nicht zwingend berechnen. Die Spalten von $T e^{xJ}$ bilden ebenso ein Fundamentalsystem.

Aufgabe 6 (6+4 Punkte) Wir definieren $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3x + 2}.$$

- (a) Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes¹ beweisen Sie, dass f einen Fixpunkt x_0 hat. Die Voraussetzungen dieses Satzes müssen überprüft werden.
- (b) Berechnen Sie den Fixpunkt.

Lösung:

- (a) Wir überprüfen die Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes. Dafür zeigen wir zuerst, dass die Menge $A := [0, \infty)$ ein vollständiger metrischer Raum ist. Sei dafür $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in A . Da $\mathbb{R}$ ein Banachraum ist, konvergiert die Folge in $\mathbb{R}$. Da aber A abgeschlossen ist, muss eine in A konvergente Folge auch einen Grenzwert in A besitzen und somit konvergiert die Folge auch in A . Weiterhin bildet die Abbildung f von A wieder in A ab. Bleibt zu zeigen, dass die Abbildung kontrahierend ist. Betrachte dafür für $x, y \geq 0$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{2x + 1}{3x + 2} - \frac{2y + 1}{3y + 2} \right| \\ &= \left| \frac{3x + 2 - x - 1}{3x + 2} - \frac{3y + 2 - y - 1}{3y + 2} \right| \\ &= \left| 1 - \frac{x + 1}{3x + 2} - \left(1 - \frac{y + 1}{3y + 2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{(-1 - x)(3y + 2) + (y + 1)(3x + 2)}{(3x + 2)(3y + 2)} \right| \\ &= \left| \frac{x - y}{(3x + 2)(3y + 2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{4} |x - y|. \end{aligned}$$

Also ist f kontrahierend mit Konstante $L = \frac{1}{4}$. Damit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und somit existiert genau ein Fixpunkt x_0 .

- (b) Für den Fixpunkt x_0 gilt

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{2x_0 + 1}{3x_0 + 2} = x_0 \\ \Leftrightarrow 2x_0 + 1 &= 3x_0^2 + 2x_0 \\ \Leftrightarrow x_0^2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

und diese Gleichung hat nur eine positive Lösung, $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

¹Andere Lösungswege werden in dem Teil nicht berücksichtigt.