

### Musterlösung Blatt 3

**Aufgabe 1** Sei  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum und  $f : X \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$  gegeben durch  $f(x) = \|x\|$ .

Zz:  $f$  ist stetig.

Sei  $x_0 \in X$ . Wir zeigen die Stetigkeit in  $x_0$  mit Hilfe der Definition, d.h. wir zeigen, dass zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für  $x_1 \in X$  mit  $\|x_0 - x_1\| < \delta$  auch

$$|f(x_0) - f(x_1)| < \epsilon$$

folgt. Da  $x_0 \in X$  beliebig ist, folgt dann die Stetigkeit auf ganz  $X$ .

Sei also  $\epsilon > 0$  und wähle  $\delta = \epsilon$  **(1P)**. Dann gilt

$$|f(x_0) - f(x_1)| = ||x_0| - |x_1|| \stackrel{(*)}{\leq} \|x_0 - x_1\| < \delta = \epsilon \quad \textbf{(1P)},$$

wobei die Gleichung  $(*)$  wie folgt bewiesen wird:

Für  $||x_0| - |x_1|| \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} ||x_0| - |x_1|| &= ||x_0| - |x_1|| \\ &= ||x_0 - x_1 + x_1| - |x_1|| \\ &\leq \|x_0 - x_1\| + ||-x_1| - |x_1|| \quad (\text{Dreiecksungleichung für Normen}) \textbf{(1P)} \\ &= \|x_0 - x_1\| + ||x_1| - |x_1|| \quad (\text{Normeigenschaft}) \\ &= \|x_0 - x_1\|. \quad \textbf{(1P)} \end{aligned}$$

Analog gilt für  $||x_0| - |x_1|| < 0$

$$\begin{aligned} ||x_0| - |x_1|| &= ||x_1| - |x_0|| \\ &= ||x_1 - x_0 + x_0| - |x_0|| \\ &\leq \|x_1 - x_0\| + ||-x_0| - |x_0|| \quad (\text{Dreiecksungleichung für Normen}) \textbf{(1P)} \\ &= \|x_0 - x_1\| + ||x_0| - |x_0|| \quad (\text{Normeigenschaft, Symmetrie}) \\ &= \|x_0 - x_1\|. \quad \textbf{(1P)} \end{aligned}$$

**Aufgabe 2** Sei  $X$  eine nichtleere Menge. Wir definieren eine Metrik  $d$  auf  $X$  durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

(a) Zz:  $X$  ist kompakt  $\Leftrightarrow X$  ist endlich

Wir zeigen zunächst:  $X$  ist endlich  $\Rightarrow X$  ist kompakt.

Sei  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Per Definition müssen wir zeigen, dass jede Folge in  $X$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert in  $X$  liegt (Definition 4.1). Sei also  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ . Da  $X$  endlich ist, existiert ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  und eine Teilfolge  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$  mit  $y_{n_k} = x_i$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$  **(0.5P)**. Die Folge  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $x_i \in X$  bezüglich der Metrik  $d$ , da

$$d(y_{n_k}, x_i) = d(x_i, x_i) = 0 \quad \textbf{(1P)}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  die gesuchte Folge.

Noch zu zeigen:  $X$  ist kompakt  $\Rightarrow X$  ist endlich

Beweis durch Widerspruch: Angenommen,  $X$  ist nicht endlich. Dann existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$ , so dass  $x_n \neq x_m$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  mit  $n \neq m$  **(0.5P)**. Da  $X$  kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Grenzwert  $x \in X$ . Da dies eine Teilfolge der ursprünglichen Folge ist, gilt weiterhin  $x_{n_k} \neq x_{n_j}$  für alle  $k, j \in \mathbb{N}$  mit  $k \neq j$ . Da die Teilfolge gegen  $x$  konvergiert, existiert nach Definition 2.23. zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$d(x_{n_k}, x) < \epsilon \quad \forall n \geq N. \textbf{(0.5P)}$$

Speziell existiert diese  $N \in \mathbb{N}$  für  $\epsilon = \frac{1}{2}$ . Da aber  $d(x, y) \in \{0, 1\}$  für alle  $x, y \in X$  erhalten wir

$$\begin{aligned} d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq N &\Leftrightarrow d(x_{n_k}, x) = 0 \quad \forall n \geq N \\ &\Leftrightarrow x_{n_k} = x \quad \forall n \geq N \textbf{(0.5P)} \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Wahl der Folge.

- (b) Sei  $X$  unendlich. Zz:  $X$  ist abgeschlossen und beschränkt bezüglich  $d$ . Nach Satz 2.20. ist jeder metrische Raum abgeschlossen, also ist  $X$  abgeschlossen **(1P)**. Wir zeigen noch, dass  $X$  beschränkt ist. Für beliebig  $x, y \in X$  gilt

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases} \leq 1$$

und somit ist  $X$  beschränkt **(1P)**.

Dies ist kein Widerspruch zum Satz von Heine-Borel, da dieser nur für normierte Räume gilt. Die Metrik  $d$  wird jedoch nicht von einer Norm induziert. **(1P)** (Wäre dies der Fall, so würde für die Norm  $\|\cdot\|$  gelten  $d(x, y) = \|x - y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  aber

$$\|\alpha x\| = \|\alpha x - 0\| = d(\alpha x, 0) = 1$$

für jedes  $x \neq 0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sodass die Normeigenschaften verletzt sind).

### Aufgabe 3

- (a) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = e^x$ . Wir suchen eine kompakte Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$ , so dass  $f^{-1}(A)$  nicht kompakt ist.

Wähle  $A = [0, 1]$ . Dann ist  $A$  beschränkt und abgeschlossen und damit nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. **(1P)** Allerdings gilt

$$f^{-1}([0, 1]) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [0, 1]\} = \{x \in \mathbb{R} : e^x \in [0, 1]\} = (-\infty, 0]. \text{ **(1P)**}$$

Die Menge  $(-\infty, 0]$  ist nicht beschränkt und als Teilmenge von  $\mathbb{R}$  daher auch nicht kompakt nach dem Satz von Heine-Borel. **(1P)**

- (b) Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und bijektive Abbildung.

1.Zz:  $g$  ist streng monoton.

Beweis per Widerspruch: Angenommen,  $g$  ist nicht streng monoton. Dann existieren  $x, y, z \in \mathbb{R}$  mit  $x < y < z$  und

- $f(x) \leq f(y)$  und  $f(y) \geq f(z)$  oder
- $f(x) \geq f(y)$  und  $f(y) \leq f(z)$ . **(1P)**

Sei zunächst  $f(x) \leq f(y)$  und  $f(y) \geq f(z)$ . Da  $f$  injektiv ist und  $x < y < z$ , muss  $f(x) < f(y)$  und  $f(y) > f(z)$  gelten. Wir untersuchen zwei Fälle:

1.Fall  $f(x) < f(z) < f(y)$ . Da  $f$  stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein  $\eta \in [x, y]$  mit

$$f(\eta) = f(z).$$

Da  $\eta \leq y$  ist, gilt  $\eta < z$  und wir erhalten einen Widerspruch zur Injektivität. **(1P)**

2.Fall  $f(z) < f(x) < f(y)$ . Da  $f$  stetig ist, wenden wir erneut den Zwischenwertsatz an. Danach existiert ein  $\eta \in [y, z]$  mit

$$f(\eta) = f(x)$$

und da  $\eta \geq y > x$  ist, ist dies ein Widerspruch zur Injektivität. **(1P)**

Den Fall  $f(x) \geq f(y)$  und  $f(y) \leq f(z)$  zeigt man analog. **(1P)**

2.Zz: Ist  $A \subseteq \mathbb{R}$  kompakt, so ist  $g^{-1}(A)$  kompakt.

Da  $g$  bijektiv ist, existiert die Umkehrabbildung  $g^{-1}$  und da  $g$  streng monoton und stetig ist, ist nach Satz 6.22. aus der Analysis 1 auch  $g^{-1}$  stetig **(1P)**. Aus Satz 4.6 der Analysis 2 folgt dann, dass für jede kompakte Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  auch das Urbild  $g^{-1}(A)$  kompakt ist **(1P)**.

### Aufgabe 4

- (a) Zz: Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist  $e^{x-1} \geq x$   
Da  $e^{x-1} > 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ , folgt sofort

$$e^{x-1} > 0 \geq x$$

für  $x \leq 0$  **(1P)**. Wir müssen also nur den Fall  $x > 0$  betrachten. Wir definieren  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = e^{x-1} - x$  und zeigen, dass  $f$  nicht-negativ ist.

Die Funktion  $f$  ist differenzierbar auf  $(0, \infty)$  und es gilt  $f'(x) = e^{x-1} - 1$  **(1P)**. Da

$$\begin{aligned} f'(x) = e^{x-1} - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow e^{x-1} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

ist  $f$  monoton steigend auf  $[1, \infty)$  **(1P)** und somit gilt

$$e^{x-1} - x = f(x) \geq f(1) = 0$$

für jedes  $x \in [1, \infty)$  **(1P)**. Analog zur obigen Rechnung ist  $f'(x) < 0$  für  $x \in (0, 1)$ , sodass  $f$  auf diesem Intervall monoton fällt und

$$e^{x-1} - x = f(x) > f(1) = 0$$

für alle  $x \in (0, 1)$  **(1P)**.

- (b) Seien  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Wir nehmen o.B.d.A. an, dass mind. ein  $a_i$  von Null verschieden ist (sonst ist die Behauptung trivial). Zz:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Sei  $c := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} > 0$ . Wir betrachten das Produkt

$$\prod_{i=1}^n e^{\frac{a_i}{c} - 1} = \exp \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{a_i}{c} - 1 \right) \right) \quad (1P)$$

$$= \exp \left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{c} - n \right) \quad (1P)$$

$$= \exp(n - n) \quad (\text{Definition von } c)$$

$$= 1. \quad (1P)$$

Nach Teil (a) gilt weiterhin für jedes  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$e^{\frac{a_i}{c} - 1} \geq \frac{a_i}{c}, \quad (1P)$$

so dass

$$1 = \prod_{i=1}^n \underbrace{e^{\frac{a_i}{c} - 1}}_{>0} \geq \prod_{i=1}^n \frac{a_i}{c} = c^{-n} (a_1 \cdots a_n) \quad (2P)$$

und durch Umformung erhalten wir

$$c^n \geq (a_1 \cdots a_n) \Leftrightarrow c \geq (a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}. \quad (1P)$$

**Aufgabe 5** Seien  $p, q \geq 1$ . Zz:

$$\frac{1}{n^2} \|v\|_q \leq \|v\|_p \leq n^2 \|v\|_q$$

für jedes  $v \in \mathbb{R}^n$ .

Es genügt die Gleichung

$$\|v\|_p \leq n^2 \|v\|_q$$

für jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  zu zeigen. Der vordere Teil folgt dann durch Vertauschen von  $p$  und  $q$  **(1P)**.

Nach Korollar 4.9. gilt

$$\|v\|_p \leq L \|v\|_q,$$

wobei

$$L = n \frac{\max\{\|x\|_p : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}}{\min\{\|x\|_q : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\}}.$$

Wir müssen also zeigen:  $L \leq n^2$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & \max\{\|x\|_p : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \max \left\{ \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\text{max. wenn Summanden maximal}} : x \in \mathbb{R}^n, x_i \in [-1, 1] \forall i = 1, \dots, n \text{ und mind. ein } |x_i| = 1 \right\} \\ &= (|1|^p + \dots + |1|^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \text{ (2P)} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \min\{\|x\|_q : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty = 1\} \\ &= \min \left\{ \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n |x_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}}_{\text{min. wenn Summanden min}} : x \in \mathbb{R}^n, x_i \in [-1, 1] \forall i = 1, \dots, n \text{ und mind. ein } |x_i| = 1 \right\} \\ &= (|1|^q + 0^q + \dots + 0^q)^{\frac{1}{q}} = 1 \text{ (2P)} \end{aligned}$$

und somit für  $p \geq 1$

$$L = n \cdot n^{\frac{1}{p}} \leq n^2. \text{ (1P)}$$

Insgesamt folgt

$$\|v\|_p \leq L \|v\|_q \leq n^2 \|v\|_q$$

für jedes  $v \in \mathbb{R}^n$  (1P).