Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 15.01 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!
Aufgaben 3 und 4 können Sie erst nach der Vorlesung am Freitag lösen.

# Analysis I
## Übungsblatt 12

**Aufgabe 1.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in [a, b]$. Aus dem Riemann-Kriterium 11.7 folgt, dass für jede natürliche $n \geqslant 1$ Treppenfunktionen $\phi_n, \psi_n \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $0 \leqslant \phi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ existieren, so dass gilt:

$$\int_a^b (\psi_n(x) - \phi_n(x))\,\mathrm{dx} < \frac{1}{n}.$$

Wir betrachten die Treppenfunktionen $p_n(x) := \sqrt{\phi_n(x) + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}}$ und $q_n(x) := \sqrt{\psi_n(x) + \frac{1}{n}}$. Beweisen Sie:

(a) $$p_n \leqslant \sqrt{f} \leqslant q_n,$$ [3P.]

(b) $$\int_a^b (q_n(x) - p_n(x))\,\mathrm{dx} < \frac{1}{\sqrt{n}}(b - a + 1).$$ [6P.]

(c) Leiten Sie daraus ab, dass $\sqrt{f}$ Riemann-integrierbar ist. [1P.]

**Aufgabe 2.** Beweisen Sie mit $\delta$ und $\epsilon$ folgende Aussagen:

(a) Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig. [6P.]

(b) Die Funktion $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ ist nicht gleichmäßig stetig. [6P.]

**Fortsetzung Seite 2.**

**Aufgabe 3.** Berechnen Sie mittels partieller Integration:

(a) $\int (\log x)^2 \,\mathrm{dx}$ (b) $\int (\log x)^3 \,\mathrm{dx}$ (c) $\int e^{ax} \sin(bx) \,\mathrm{dx}$

[9P.]

**Aufgabe 4.** Berechnen Sie mittels der Substitutionsregel:

(a) $\int \log(ax+b) \,\mathrm{dx}$ (b) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} \,\mathrm{dx}$ (c) $\int xe^{-x^2} \,\mathrm{dx}$

[9P.]