

Alle Antworten müssen begründet werden! Die Begriffe “nach oben (nach unten) beschränkt”, “obere und untere Schranke”, $\sup \mathcal{M}$ und $\inf \mathcal{M}$ werden am Dienstag, den 16.10, erklärt. Diese Begriffe können Sie schon im Skript finden.

Analysis I
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. [7 Punkte]

Für eine Menge X bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X . Berechnen Sie

- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\}))$.
- Schreiben Sie das kartessche Produkt $\mathcal{P}(\{1\}) \times \mathcal{P}(\{2\})$ auf.

Aufgabe 2. [5 Punkte]

Beweisen Sie nur mit Hilfe der Körperaxiome (a) – (f) für \mathbb{R} :

- Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert ein **eindeutiges** Element y mit $xy = 1$.*
Nennen Sie dabei die Axiome, die Sie benutzen.

Aufgabe 3. [10 Punkte]

Beschreiben Sie möglichst einfach die Menge aller reellen Zahlen x , für die gilt:

- $|x - 4| = 9$,
- $|x - 4| < 8$,
- $|x + 2| \leq |x - 1|$,
- $|x + 2| \leq 2|x - 1|$,
- $|x - 2| \cdot |x - 3| = 0$,
- $3 - x^2 < 5$,
- $(x - 3)(x - 4) > 0$.
- $x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

Welche dieser Mengen sind nach oben bzw. nach unten beschränkt?

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4.

[10 Punkte]

a) Bestimmen Sie alle unteren Schranken für die Menge

$$M := \left\{ n - \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

b) Bestimmen Sie $\inf M$.c) Entscheiden Sie, ob $\sup M$ existiert?**Aufgabe 5.**

[8 Punkte]

a) Es gilt die folgende **Dreiecksungleichung**: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Leiten Sie daraus ab: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x - y| \geq |x| - |y|.$$

b) Leiten Sie aus a) ab: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x - y| \geq ||x| - |y||.$$