Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 6.11 bis 14:30 Uhr

Aufgaben 1 und 2 können Sie schon jetzt lösen. Andere Aufgaben können Sie nach der Vorlesung am Freitag lösen; s. auch Skript. Alle Antworten müssen begründet werden!

Analysis I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Geben Sie zwei konvergente Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ist. [3 P.]

Aufgabe 2. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} a_1 &:= \sqrt{2}\,, \\ a_{n+1} &:= \sqrt{2+a_n}\,. \end{aligned}$$

(i) Beweisen Sie per Induktion:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < 2$. [4 Punkte]

(ii) Leiten Sie aus (i) ab: [4 Punkte]
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend.

(iii) Beweisen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. [4 Punkte]

Aufgabe 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei [1+3+1 P.]

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ divergiert.

(c) Warum ist Punkt (b) kein Gegenbeispiel zu Satz 5.7 des Skripts?

Aufgabe 4. Welche der folgenden Reihen konvergieren, welche konvergieren absolut? [20 P.]

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 3}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n + 3}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + n + 1}$