# Stetigkeit der Exponentialfunktion

**Satz.** Die Funktion $\exp(x)$ ist stetig.

*Beweis.* Nach Satz 6.10 gilt

$$\Big|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\Big| \leqslant 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \text{ falls } |x| \leqslant 1 + \frac{N}{2} \text{ ist.} \tag{1}$$

Wir beweisen die Stetigkeit von exp in Punkt $x_0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, für das die folgende Implikation gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\exp(x) - \exp(x_0)| < \varepsilon.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\exp(x) - \exp(x_0)| \leqslant \Big|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\Big| + \Big|\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x_0^n}{n!}\Big| + \Big|\exp(x_0) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x_0^n}{n!}\Big|. \tag{2}$$

Wenn wir zeigen, dass jeder der drei Summanden kleiner als $\varepsilon/3$ für bestimmte $N$ und $\delta$ ist, dann sind wir fertig.

1) Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$N \geqslant 2|x_0| + 1, \tag{3}$$

$$2\frac{(|x_0| + 1)^{N+1}}{(N+1)!} < \varepsilon/3. \tag{4}$$

2) Aus der Stetigkeit des Polynoms $\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$ folgt, dass ein $\delta$ mit $1 > \delta > 0$ existiert, so dass für $|x - x_0| < \delta$ gilt:

$$\Big|\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{x_0^n}{n!}\Big| < \varepsilon/3. \tag{5}$$

Aus $|x - x_0| < \delta$ folgt

$$|x| < |x_0| + \delta < |x_0| + 1 \overset{(3)}{\leqslant} 1 + \frac{N}{2}.$$

Dann gilt

$$\Big|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\Big| \overset{(1)}{\leqslant} 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \leqslant 2\frac{(|x_0| + 1)^{N+1}}{(N+1)!} \overset{(4)}{<} \frac{\varepsilon}{3} \tag{6}$$

Insbesondere gilt

$$\Big|\exp(x_0) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x_0^n}{n!}\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{7}$$

Aus (5), (6) und (7) folgt, dass die rechte Seite in (2) kleiner als $\varepsilon$ ist. □