Lösungsvorschlag für Übungsblatt 14

Aufgabe 1. Um die Konvergenzradien der Potenzreihen zu bestimmen, benutzen wir Satz 12.18 oder Satz 12.24.

(a) Es ist $(-1)^n/n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^n/n|}{|(-1)^{n+1}/(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 1.

Bemerkung: Da $r = 1$ ist, konvergiert die Reihe (sogar absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ nach Satz 12.16. Für $z = -1$ ist die Potenzreihe die harmonische Reihe und somit divergent. Mit Hilfe des *verallgemeinerten Leibniz-Kriteriums*[1] kann man zeigen, dass die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ konvergiert.

Alternative Lösung: Nach Satz 12.24 gilt für den Konvergenzradius r der Potenzreihe, dass

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1.$$

Also ist $r = 1$.

(b) Nach Satz 12.24 gilt für den Konvergenzradius r der Potenzreihe, dass

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}} \overset{12.25(b)}{=} 0.$$

Also ist $r = \infty$, d.h. die Potenzreihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Alternative Lösung: Es ist der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{1.1}$$

zu bestimmen. Wir betrachten zunächst die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^n. \tag{1.2}$$

Es ist $(-1)^n/(2n)! \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(-1)^n/(2n)!|}{|(-1)^{n+1}/(2(n+1))!|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} (2n+2)(2n+1) = \infty.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (1.2) gleich ∞, d.h. die Potenzreihe (1.2) konvergiert für alle $w \in \mathbb{C}$. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ beliebig, so erhalten wir die Konvergenz der Potenzreihe (1.1), indem wir $w = z^2$ in (1.2) setzen. Somit konvergiert auch die Potenzreihe (1.1) für alle $z \in \mathbb{C}$ und hat somit den Konvergenzradius ∞.

[1] Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

(c) Nach Satz 12.24 gilt für den Konvergenzradius r der Potenzreihe, dass

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|e^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt{e} = \sqrt{e}.$$

Also ist $r = 1/\sqrt{e}$.

Bemerkung: Da $r = 1/\sqrt{e}$ ist, konvergiert die Reihe (sogar absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1/\sqrt{e}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1/\sqrt{e}$ nach Satz 12.16. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1/\sqrt{e}$ ist $|e^n z^{2n}| = 1$, d.h. $(e^n z^{2n})_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge und die zugehörige Potenzreihe somit divergent.

1. Alternative Lösung: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n z^{2n} \tag{1.3}$$

zu bestimmen. Wir betrachten zunächst die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n w^n. \tag{1.4}$$

Es ist $e^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e^n|}{|e^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (1.4) gleich $1/e$, d.h. die Potenzreihe (1.2) konvergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1/e$ und divergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1/e$. Somit konvergiert die Potenzreihe (1.3) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z^2| < 1/e$, also mit $|z| < 1/\sqrt{e}$, und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z^2| > 1/e$, also mit $|z| > 1/\sqrt{e}$. Damit ist $r = 1/\sqrt{e}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe (1.4).

2. Alternative Lösung: Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (ez^2)^n.$$

Die Potenzreihe ist also eine geometrische Reihe und konvergiert genau dann für $z \in \mathbb{C}$, wenn $|ez^2| < 1$, also $|z| < 1/\sqrt{e}$ ist. Damit ist $r = 1/\sqrt{e}$ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

(d) Es ist $(n!)^2/((2n)!) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(n!)^2/((2n)!)|}{|((n+1)!)^2/((2(n+1))!)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 4.

Bemerkung: Da $r = 4$ ist, konvergiert die Reihe (sogar absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 4$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 4$ nach Satz 12.16. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 4$ erhalten wir mit der sogenannten *Sterlingformel*[2], dass

$$\left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot z^n \right| = 4^n \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} \geq 4^n \cdot \frac{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2}{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} e^{1/(24n)}} = \sqrt{\pi n} e^{-1/(24n)} \xrightarrow{n\to\infty} \infty,$$

d.h. $(z^n (n!)^2/((2n)!))_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge und die zugehörige Potenzreihe somit divergent.

[2] Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! \leq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{1/(12n)}$.

(e) Nach Satz 12.24 gilt für den Konvergenzradius r der Potenzreihe, dass

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|e^{\sqrt{n}}\right|} = \limsup_{n\to\infty} e^{1/\sqrt{n}} = e^0 = 1.$$

Also ist $r = 1$.

Bemerkung: Da $r = 1$ ist, konvergiert die Reihe (sogar absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ nach Satz 12.16. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist

$$|e^{\sqrt{n}} z^n| = e^{\sqrt{n}},$$

d.h. $(e^{\sqrt{n}} z^n)_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge und die zugehörige Potenzreihe somit divergent.

Alternative Lösung: Es ist $e^{\sqrt{n}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie

$$\frac{|e^{\sqrt{n}}|}{|e^{\sqrt{n+1}}|} = e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}.$$

Nun ist

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e^{\sqrt{n}}|}{|e^{\sqrt{n+1}}|} = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = e^0 = 1.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 1.

Aufgabe 2. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ der Fibonacci-Zahlen rekursiv:

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ und } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für } n \geq 1. \tag{2.1}$$

(a) Es gilt

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Damit gilt

$$\min\{n \in \mathbb{N} \mid f_n \geq 100\} = 12.$$

(b) Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ durch $x_n = f_n/f_{n+1}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$x_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} \stackrel{(2.1)}{=} \frac{f_{n+1}}{f_{n+1} + f_n} = \frac{1}{1 + \frac{f_n}{f_{n+1}}} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

(c) *Beh.* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

- *Induktionsanfang*: $n = 1$.
  Nach (2.1) ist $x_1 = f_1/f_2 = 1/1 = 1$. Also ist $1/2 \leq x_1 \leq 1$.

- *Induktionsschritt*: $n \to n+1$.
  Es ist

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{1+x_n}}_{=x_{n+1}} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \leq 1.$$

Es folgt die Behauptung. □

(d) *Beh.* Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten zunächst die Differenz $|x_{n+1} - x_n|$. Es gilt

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} - \frac{f_n}{f_{n+1}} \right| = \left| \frac{f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2}}{f_{n+2} f_{n+1}} \right|. \tag{2.2}$$

Per Induktion lässt sich zeigen, dass $f_{n+1}^2 - f_n f_{n+2} = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zusammen mit (2.2) erhalten wir

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{(-1)^n}{f_{n+2} f_{n+1}} \right| = \frac{1}{f_{n+2} f_{n+1}}. \tag{2.3}$$

Auch per Induktion lässt sich zeigen, dass $f_n \geq n$ für alle $n \geq 5$ gilt. Zusammen mit (2.3) folgt

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \tag{2.4}$$

für alle $n \geq 4$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Wir setzen $N_0 := \max\{N, 4\}$. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n \geq N_0$, dass

$$|x_m - x_n| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} x_{k+1} - x_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k| \overset{(2.4)}{\leq} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^2} \overset{(2.5)}{<} \varepsilon.$$

Damit ist die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge. □

(e) Da die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ nach (d) eine Cauchy-Folge ist, ist sie nach Theorem 4.25 konvergent. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \overset{\text{(b)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+x}.$$

Nach (b) ist $x \neq -1$ und wir erhalten $x^2 + x - 1 = 0$. Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen, nämlich

$$x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ und } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Aus (c) wissen wir, dass $x \geq 1/2$ ist. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(f) Es ist $f_{n+1} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1}|}{|f_{n+2}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \overset{\text{(e)}}{=} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Nach Satz 12.18 hat die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n$$

den Konvergenzradius

$$r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(g) Es gilt

$$\begin{aligned}
(1-z-z^2)f(z) &= (1-z-z^2)\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}z^n - \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}z^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}z^{n+2} \\
&= f_1 + f_2 z + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+2}z^{n+1} - f_1 z - \sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1}z^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^{n+1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{f_{n+2} - f_{n+1} - f_n}_{=0 \text{ nach } (2.1)}) z^{n+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Da $1 - z - z^2 \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$ gilt, folgt

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < r$.

(h) Nach Satz 12.21(b) gilt

$$f^{(10)}(0) = 10! \cdot f_{10+1} = 10! \cdot f_{11} = 10! \cdot 89 = 322\,963\,200.$$

Aufgabe 3. Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen.

(a) Beh. Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$. Für jedes $k \geq N$ gilt $a_k \leq \sup\{a_n \mid n \geq N\}$ und $b_k \leq \sup\{b_n \mid n \geq N\}$ und somit

$$a_k + b_k \leq \sup\{a_n \mid n \geq N\} + \sup\{b_n \mid n \geq N\}.$$

Damit ist $\sup\{a_n \mid n \geq N\} + \sup\{b_n \mid n \geq N\}$ eine obere Schranke für die Menge $\{a_n + b_n \mid n \geq N\}$. Da $\sup\{a_n + b_n \mid n \geq N\}$ die kleinste obere Schranke für die Menge $\{a_n + b_n \mid n \geq N\}$ ist, folgt

$$\sup\{a_n + b_n \mid n \geq N\} \leq \sup\{a_n \mid n \geq N\} + \sup\{b_n \mid n \geq N\}. \tag{3.1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) &= \lim_{N\to\infty} \sup\{a_n+b_n \mid n \geq N\} \\
&\overset{(3.1)}{\leq} \lim_{N\to\infty} \sup\{a_n \mid n \geq N\} + \lim_{N\to\infty} \sup\{b_n \mid n \geq N\} \\
&= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

(b) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ definiert durch

$$a_n = (-1)^n \text{ und } b_n = (-1)^{n+1}.$$

Dann gilt $\sup\{a_n \mid n \geq N\} = 1 = \sup\{b_n \mid n \geq N\}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Also gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Es ist aber $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = 0 < 2 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 4.

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. Also ist

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

wobei

$$c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{m!} & \text{falls } n = 2m \text{ gerade,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ und

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Um F in eine Potenzreihe zu entwickeln, betrachten wir für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot t^{2n}.$$

Dann ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ stetig. Wir wissen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}/n!$ für alle $t \in \mathbb{R}$ konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ ist also $r = \infty$. Nach Satz 12.16(b) konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ dann für alle $\rho > 0$ auf dem Intervall $[-\rho, \rho]$ gleichmäßig, also insbesondere auf $[0, x]$. Zusammen mit Korollar 12.9(b) erhalten wir

$$F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \cdot x^{2n+1}.$$